

## Вихри в сверхтекучей жидкости

### Введение

Сверхтекучесть - это свойство жидкости течь без трения. Повседневный опыт говорит нам, что при движении обычной жидкости (например, воды при комнатной температуре) всегда возникает вязкое трение, приводящее к диссипации энергии так, что поток постепенно замедляется, если он не поддерживается внешними силами. Напротив, сверхтекучая жидкость не теряет кинетической энергии: однажды возбужденное движение сверхтекучей жидкости может продолжаться бесконечно долго. Сверхтекучесть была первоначально экспериментально обнаружена в жидком гелии.

Мы будем рассматривать свойства сверхтекучего гелия при нулевой температуре. Будем считать, что это несжимаемая жидкость с плотностью  $\rho$ , которая обладает свойством непрерывности (масса вытекающая в заданный бесконечно малый объем, и вытекающая из него, одинакова). Это позволяет утверждать, что поток вектора скорости гелия  $\vec{v}$  через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю. Отсюда можно сделать вывод, что скорость сверхтекучей жидкости аналогична индукции магнитного поля. Аналогично линиям индукции магнитного поля, "линии тока" в каждой своей точке направлены по касательной к скорости и их плотность пропорциональна величине скорости.

Истинное сверхтекучее движение является безвихревым, т.е. циркуляция вектора скорости  $\vec{v}$  по любому замкнутому контуру внутри гелия равна нулю

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1)$$

Однако это выражение необходимо изменить, если сверхтекучесть отсутствует вдоль тонкой "вихревой нити" или "вихря". Толщина нити имеет приблизительно атомарные размеры  $a$ , вокруг нее создаются потоки жидкости на больших расстояниях (дальняя зона). Циркуляция вектора скорости вокруг такой нити равна кванту циркуляции.<sup>1</sup>

$$\left| \int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} \right| = 2\pi\kappa, \quad (2)$$

и равна нулю если контур не охватывает ни одну вихревую нить (см. рис. 1). Это подтверждает аналогию между полем векторов скоростей сверхтекучей жидкости и магнитным полем, создаваемым проводами с током: для полей векторов скоростей выполняется принцип суперпозиции (сумма двух полей скоростей также дает поле скоростей), и скорость в любой точке равна (с точностью до размерного коэффициента) индукции магнитного поля, создаваемого электрическими токами, текущими через систему проводов, соответствующих вихревым нитям.

<sup>1</sup>Такое квантование является макроскопическим квантовым эффектом и соответствует квантованию момента импульса в модели Бора. Квант циркуляции скорости может быть записан как  $\kappa = \hbar/m_{\text{He}}$ , где  $m_{\text{He}}$  масса атома гелия.

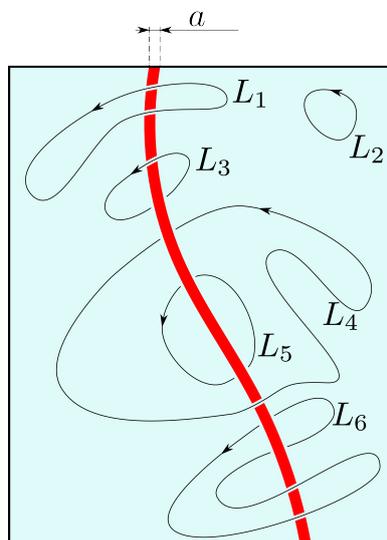


Fig. 1: Вихревая нить (красная линия) в сверхтекучей жидкости (светло голубой фон). Значение циркуляции вектора скорости вдоль траекторий  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_5$  и  $L_6$  равно нулю, циркуляция вдоль  $L_3$  и  $L_4$  равна  $\pm 2\pi\kappa$ . Важно отметить, что циркуляции вектора скорости вдоль траекторий  $L_3$  и  $L_4$  имеют разные знаки.

### Задание А. Покоящийся вихрь (0.75 балла).

Рассмотрим цилиндрический сосуд (радиусом  $R_0 \gg a$ ) со сверхтекучим гелием и прямой вертикальной вихревой нитью в ее центре (рис. 2).

**A.1** Нарисуйте линии тока. Найдите скорость  $v$  в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$ . 0.25pt

**A.2** Найдите форму свободной поверхности, которая образуется вокруг вихревой нити, т.е. зависимость высоты от расстояния до оси  $z(\vec{r})$ . Ускорение свободного падения  $g$ . Поверхностным натяжением можно пренебречь. 0.5pt

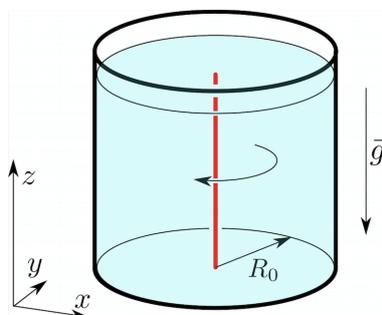
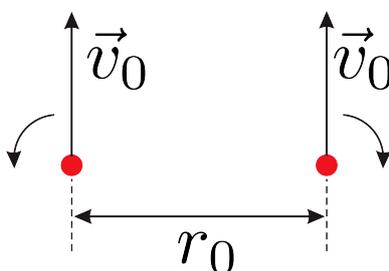


Рис. 2. Вихревая нить вдоль оси цилиндрического сосуда.

**Задание В. Движущиеся вихри (1.4 балла).**

Свободные вихри движутся в пространстве вместе с потоком<sup>2</sup>. Другими словами, каждый элемент вихревой нити движется со скоростью  $\vec{v}$ , равной скорости жидкости, которая должна была быть на месте этого элемента.

Для примера, рассмотрим два вихря, вращающихся противоположно друг другу и расположенных на некотором заданном начальном расстоянии  $r_0$  друг от друга (см. рис. 3). Каждый вихрь создает движение жидкости со скоростью  $v_0 = \kappa/r_0$  в точке, в которой располагается ось другого вихря. В результате, эти два вихря движутся прямолинейно и с постоянной скоростью  $v_0 = \kappa/r_0$ , поэтому расстояние между ними не изменяется.



Параллельно движущиеся вихри с противоположной циркуляцией.

- В.1** Рассмотрим два одинаковых вихря, которые вначале расположены на расстоянии  $r_0$  друг от друга, как показано на рис. 4. Найдите начальные скорости вихрей и изобразите их траектории. 0.25pt

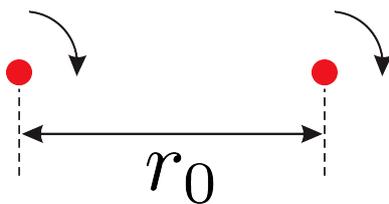


Рис. 4. Две параллельные вихревые нити с одинаковыми циркуляциями.

Цилиндрическая емкость с гелием (см. Задание А), заполнена треугольной решеткой ( $u \ll R_0$ ) из одинаковых вертикальных вихревых нитей (см. рис. 5).

<sup>2</sup>Это является следствием закона сохранения импульса, см. следующий раздел

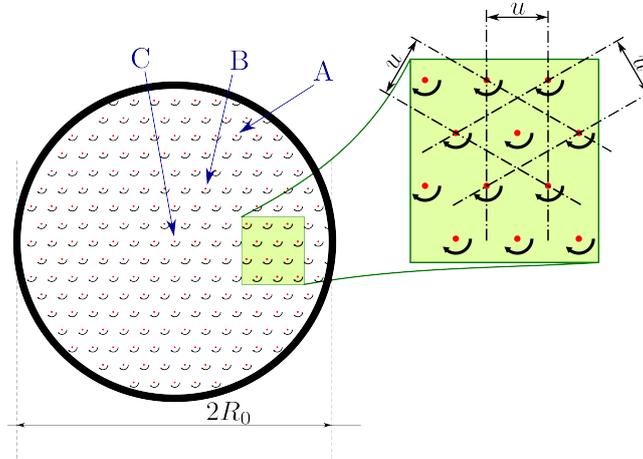


Рис. 5: Треугольная решетка вихрей в цилиндрическом сосуде. Вид сверху.

<b>B.2</b>	Нарисуйте траектории вихрей A, B и C (расположенного в центре).	0.15pt
<b>B.3</b>	Найдите скорость $v(\vec{r})$ вихря расположенного в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ .	0.4pt
<b>B.4</b>	Найдите зависимость расстояния $AB(t)$ между вихрями A и B от времени $t$ . Считайте $AB(0)$ в начальный момент времени заданным.	0.35pt
<b>B.5</b>	Найдите сглаженную форму свободной поверхности гелия $z(\vec{r})$ , не учитывая решетчатую структуру	0.25pt

### Задание С. Импульс и энергия.

Поле скоростей в дальней зоне, т.е. расположенных на расстоянии намного большем, чем размер вихря дает основной вклад в энергию системы вихрей. Поэтому она нечувствительна к точной структуре вихревых нитей. Сама вихревая нить не может быть правильно описана макроскопической теорией, поэтому мы считаем, что возникающие сингулярности (бесконечности) несущественны. В действительности, величиной энергии внутри тонкой трубки с радиусом  $a$  вокруг вихревой нити можно пренебречь. Вне этой трубки плотность кинетической энергии сверхтекучей жидкости  $\rho v^2/2$  (где  $\rho = \text{const}$ ) подобна плотности энергии магнитного поля  $B^2/(2\mu_0)$  — они обе квадратичны по соответствующим переменным. Эта аналогия вместе с соответствием между магнитным полем и скоростью сверхтекучей жидкости, а также вихревыми нитями и токами, облегчает расчет кинетической энергии для заданной системы. Например, для случая круговой проводочной петли с током радиусом  $R$  с радиусом провода  $a$  величина индуктивности  $L \approx \mu_0 R \log(R/a)$ , отсюда мы получаем энергию сверхтекучей вихревой петли (вихревого кольца)<sup>3</sup>

$$U \approx 2R\rho\pi^2\kappa^2 \log(R/a) \quad (3)$$

Полный импульс жидкости также определяется распределением скоростей в дальней зоне. Он получается интегрированием плотности импульса  $\rho\vec{v}$ . Снова рассмотрим поток, созданный вихре-

<sup>3</sup>Это выражение также справедливо, только если  $\log R/a \gg 1$ .



вым кольцом, расположенной в плоскости  $xy$ . Из соображений симметрии очевидно, что полный импульс имеет компоненту отличную от нуля только вдоль оси  $z$ :

$$P = \int \rho v_z dV = \rho \int \int \underbrace{\left( \int v_z dz \right)}_{q(x,y)} dx dy \quad (4)$$

Внутреннее интегрирование это интегрирование вдоль линий направленных параллельно оси  $z$  (см. Рис. 6). Из тождества (2) следует, что внутренний интеграл

$$q(x,y) = \int_{L(x,y)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (5)$$

может принимать только два значения, а именно ноль - для линий проходящих вне кольца и  $2\pi\kappa$  для линий проходящих внутри кольца. Поэтому полный импульс равен

$$P = \rho \cdot \pi R^2 \cdot 2\pi\kappa = 2\pi^2 \rho R^2 \kappa \quad (6)$$

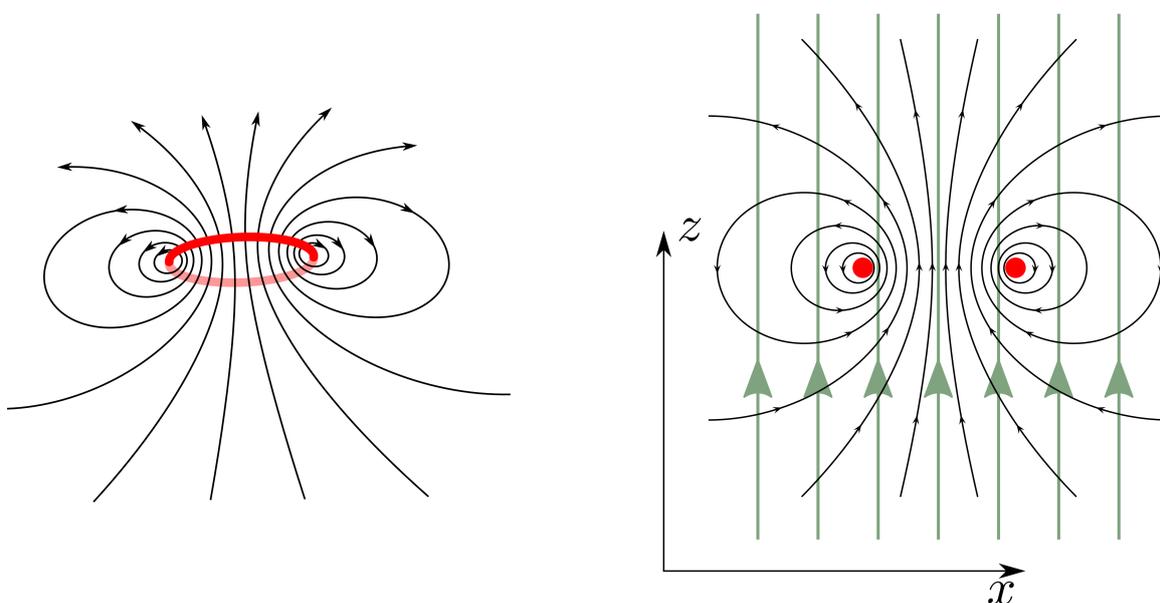


Рис. 6: Поле скоростей для вихревого кольца и линии интегрирования (обозначены зеленым цветом) для вычисления  $q(x,y)$ .

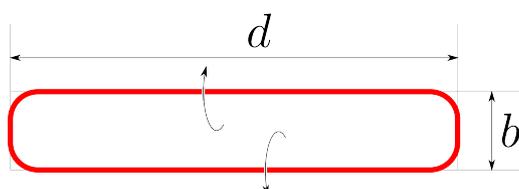


Fig. 7: Вихревая петля в форме близкой к прямоугольной,  $b \ll d$ .



**C.1** Рассмотрим вихревую петлю в форме близкой к прямоугольнику с размерами  $b \times d$ ,  $b \ll d$ , Рис. 7. Укажите направление ее полного импульса  $\vec{P}$ . Найдите величину полного импульса. 0.3pt

**C.2** Найдите энергию этой петли  $U$ . 0.7pt

**C.3** Предположим, что мы сдвинули длинную прямую вихревую нить на расстояние  $b$  в направлении оси  $x$ , см. Рис.8. Насколько изменился полный импульс жидкости? Укажите направление изменения полного импульса жидкости. Длина нити (ограниченная стенками сосуда) равна  $d$ . 0.75pt

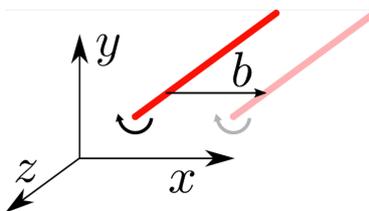


Рис. 8: Импульс изменяется всегда, когда вихрь смещается относительно жидкости.

### Задание D. Захваченные заряды (2.85 балла)

Если электроны поместить в гелий, то они будут "захвачены" в вихревую нить. Здесь и далее пренебрегаем диэлектрической проницаемостью гелия ( $\epsilon = 1$ ).

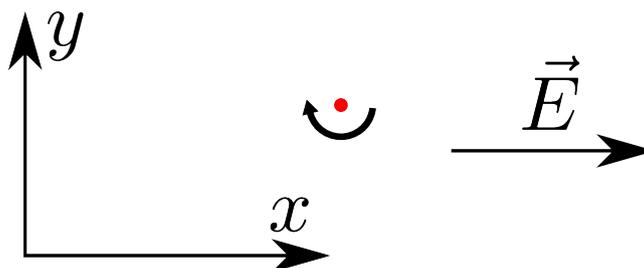


Fig. 9: Прямая вихревая нить в однородном электрическом поле.

**D.1** Рассмотрим прямую вихревую нить, заряженную с постоянной линейной плотностью  $\lambda < 0$  и помещенную в однородное электрическое поле  $\vec{E}$ . Изобразите траекторию движения нити. Найдите зависимость ее скорости от времени. 0.5pt

Вихревое кольцо радиуса  $R_0$ , первоначально с однородно распределенным зарядом с линейной плотностью  $\lambda < 0$  помещена в однородное электрическое поле  $\vec{E}$  перпендикулярное к ее плоскости и направленное противоположно вектору полного импульса  $\vec{P}_0$ .

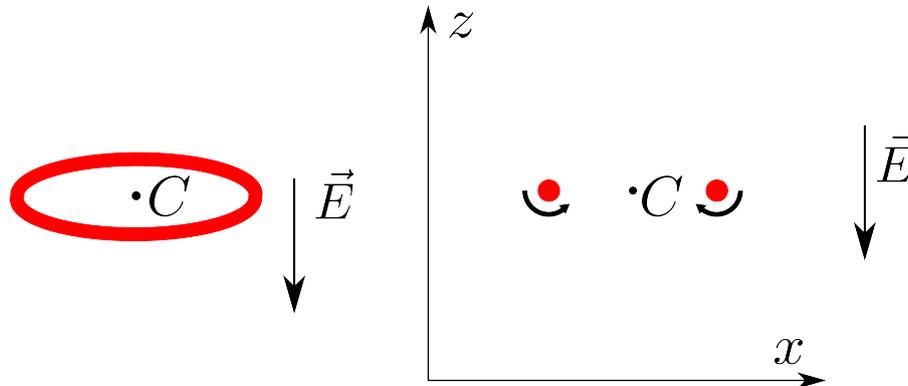


Рис. 10: (слева) Вихревое кольцо в однородном электрическом поле. (справа) Поперечное сечение кольца.

**D.2** Нарисуйте траекторию движения центра вихревого кольца  $C$ . Найдите зависимость радиуса кольца от времени. 0.6pt

**D.3** Найдите зависимость скорости центра кольца  $v(t)$  от времени. 1.5pt

**D.4** В некоторый момент времени  $t^*$ , когда скорость достигает значения  $v^* = v(t^*)$ , электрическое поле выключают. Найдите скорость  $v(t)$  вихревого кольца в моменты времени  $t > t^*$ . 0.25pt

### Задание Е. Влияние границ (3.25 балла)

Твердые стенки изменяют поле скоростей, создаваемое вихревой нитью, потому что жидкость не может протекать сквозь них. Математически это означает, что составляющая скорости, направленная перпендикулярно к стенке, обращается в ноль на ее поверхности.

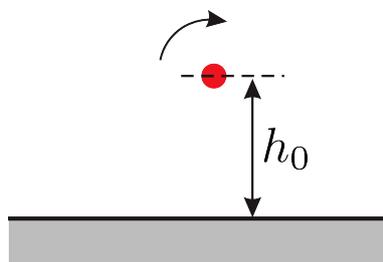


Рис. 11: Прямолинейная вихревая нить возле плоской стены.

**E.1** Нарисуйте траекторию прямолинейного вихря, первоначально расположенного на расстоянии  $h_0$  от плоской стены. Найдите зависимость скорости от времени. 0.5pt

Рассмотрим прямолинейный вихрь расположенный в углу на расстоянии  $h_0$  от обеих плоских стенок.

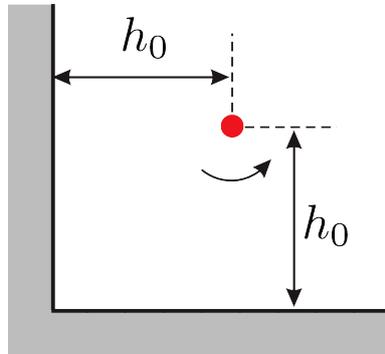


Рис. 12: Прямолинейная вихревая нить в углу.

- |            |   |        |
|------------|---|--------|
| <b>E.2</b> | Чему равна начальная скорость $v_0$ вихря?                                    | 0.75pt |
| <b>E.3</b> | Изобразите траекторию вихря.  | 0.5pt  |
| <b>E.4</b> | Чему равна скорость вихря $v_\infty$ спустя очень большой промежуток времени? | 1.5pt  |