Космический мусор

Введение

За более чем полувековую историю освоения космоса, вокруг Земли скопилось огромное количество космического мусора, состоящего из нефункционирующих спутников, использованных верхних ступеней ракет и прочих объектов, не выполняющих никаких полезных функций. Для очистки орбит от космического мусора в настоящее время планируют специальные миссии. Предполагается, что специальные аппараты - космические буксиры - захватывают крупные объекты космического мусора и сводят их в плотные слои атмосферы или на специальные орбиты-захоронения. Однако перед тем, как отправлять буксир для захвата космического мусора, важно понимать вращательную динамику этих объектов на орбите.
В данной задаче вам предстоит спланировать подобную миссию по очистке орбит от ненужных объектов, анализируя различные факторы влияющие на изменение параметров их движения .

Описание использованной ступени ракеты

В данной задаче в качестве крупного объекта космического мусора будет рассмотрена использованная верхняя ступень ракеты, схематично показанная на Рис. 1. Круговой линией схематически показан сферический топливный бак ракеты.

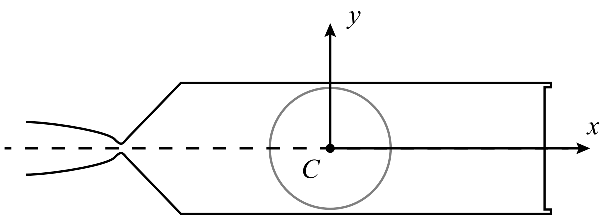


Рис. 1: Верхняя ступень ракеты Kerbodyne-42

Введем систему координат Cxy , связанную со ступенью ракеты, как показано на (Рис. 1), с началом в центре масс C. Ось x совпадает с осью симметрии объекта, а ось y перпендикулярна к оси x. Моменты инерции объекта относительно этих осей x и y являются известными величинами J_x и J_y (J_x < J_y).

Задание A. Вращение (3.8 балла)

Рассмотрим движение ступени с моментом импульса L, который составляет угол θ с осью симметрии (Рис. 2). В данном пункте будем считать, что топливный бак пуст, и никакие внешние силы или моменты сил на ступень не действуют.

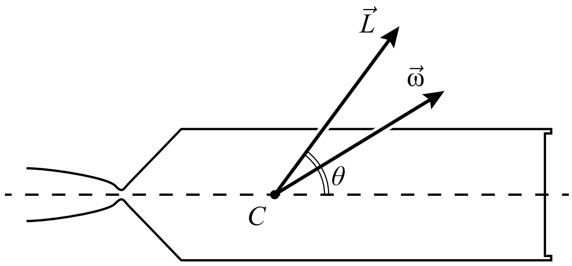


Рис. 2: Вращение ступени ракеты

A.1	Найдите проекции угловой скорости объекта $\vec{\omega}$ на оси x и y, используя тот факт, что момент импульса записывается как $\vec{L} = J_x\omega_x\vec{e}_x + J_y\omega_y\vec{e}_y$, где $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$ - единичные векторы осей x и y. Ответ выразите через $L = \lvert\vec{L}\rvert$, угол θ, и моменты инерции J_x, J_y.	0.2pt

A.2	Найдите кинетическую энергию E_x вращения ступени с угловой скоростью ω_x. Найдите кинетическую энергию E_y вращения ступени с угловой скоростью ω_y. Найдите полную кинетическую энергию вращательного движения ступени $E = E_x + E_y$ как функцию ее момента импульса L и $\cos\theta$.	0.4pt

В последующих подпунктах задания A считайте, что ступень свободно вращается с начальным моментом импульса L и начальным углом $\theta(0) = \theta_0$.

A.3	Пусть ось x_0 - начальное положение оси симметрии Cx ступени относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Используя законы сохранения, найдите максимальный угол ψ, между осью симметрии Cx ступени и её первоначальным направлением x_0 в течение свободного вращения объекта. *Примечание:* Вектор момента импульса ступени сохраняется, так как на ступень не действуют никакие внешние моменты сил.	1.2pt

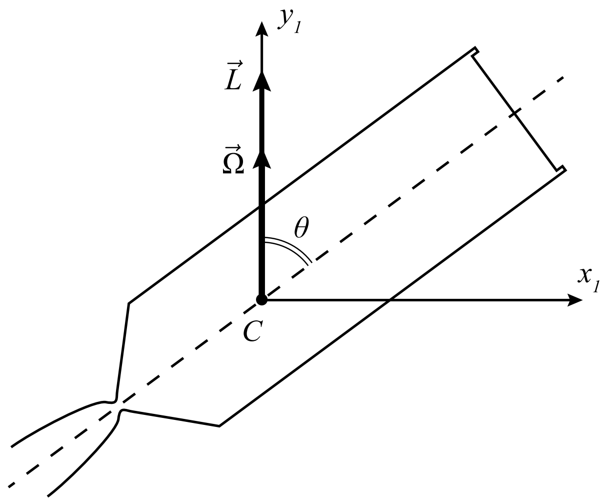


Рис. 3: Прецессия

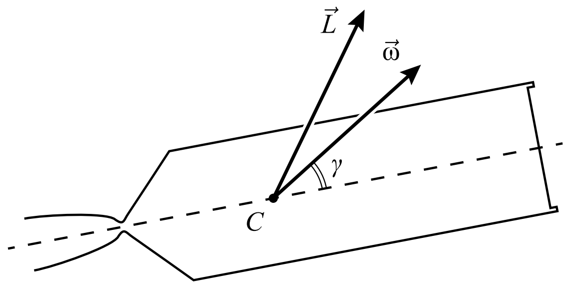
Рассмотрим систему отсчета $Cx_1y_1z_1$, ось y_1 которой сонаправлена с постоянным вектором момента импульса $\vec{L}$ (Рис. 3). Система $Cx_1y_1z_1$ вращается вокруг оси y_1 так, что ось симметрии ступени ракеты все время остается в плоскости Cx_1y_1.

A.4	Пусть даны значения L, $\theta(0) = \theta_0$ и моментов инерции J_x, J_y. Найдите как функции времени угловую скорость вращения $\Omega(t)$ системы отсчета Cx_1y_1 вокруг оси y_1, а также направление и величину угловой скорости ступени $\vec{\omega}_s(t)$ относительно системы отсчета Cx_1y_1 . Ответ для направления $\vec{\omega}_s(t)$ приведите через угол $\gamma_s(t)$, который $\vec{\omega}_s(t)$ составляет с осью Cx. *Примечание*: Вектор угловой скорости может быть представлен в виде суммы $\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_s$.	2.0pt

Задание B. Переходный процесс (1.2 балла)

Большая часть топлива сжигается во время подъема ракеты, однако, после отсоединения от ступени полезной нагрузки в топливном баке остается неизрасходованное жидкое топливо. Масса m остатков жидкого топлива мала по сравнению с массой M ступени ракеты. Движение жидкого топлива в баке и соответствующие силы вязкого трения между топливом и стенками бака приводят к потерям энергии. В результате переходного процесса через некоторое время энергия достигает своего минимума.

B.1	Считая известными начальные значения момента импульса L и угла $\theta(0) = \theta_1 \in (0, \pi/2)$, найдите значение θ_2 угла θ в конце переходного процесса.	0.6pt



Угол между вектором угловой скорости ступени и ее осью симметрии

B.2	Пусть в начальный момент времени угловая скорость $\omega(0) = \omega_1 = 1\ rad/s$ составляет угол $\gamma(0) = \gamma_1 = 30^\circ$ с осью симметрии ступени. Вычислите значение ω_2 угловой скорости ω после прохождения переходного процесса. Моменты инерции ступени равны $J_x = 4200\ kg \cdot m^2$ и $J_y = 15\ 000\ kg \cdot m^2$.	0.6pt

Задание C. Магнитное поле (5.0 баллов)

Ещё один важный фактор для вращательной динамики рассматриваемых объектов - взаимодействие с магнитным полем Земли. Для начала решим вспомогательную задачу.

Момент сил, обусловленный вихревыми токами

Рассмотрим тонкостенную немагнитную сферическую оболочку с толщиной стенок D и радиусом R, помещенную в однородное магнитное поле $\vec{B}$. Поле $\vec{B}$ меняется медленно, а производная по времени $\dot{\vec{B}}$ ($\vec{B}$ "с точкой") есть постоянный вектор, составляющий угол α с направлением вектора $\vec{B}$ (Рис. 4). Удельное сопротивление материала сферической оболочки равно ρ.

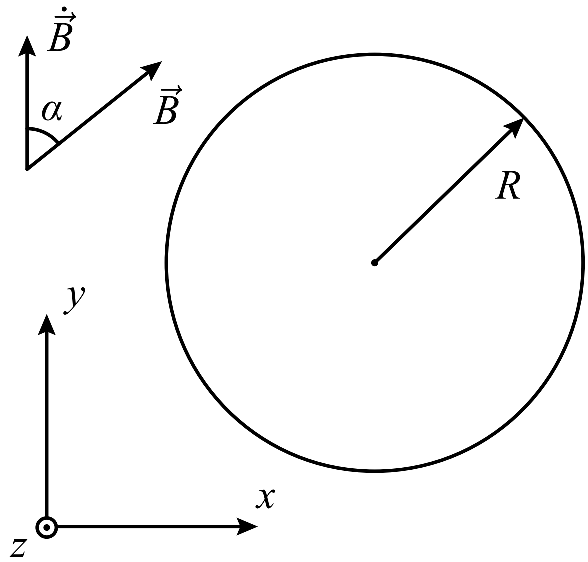


Рис. 4: Сферическая оболочка в магнитном поле

C.1	Пренебрегая явлением самоиндукции, найдите магнитный момент $\vec{\mu}$ сферической оболочки. Приведите ответ для вектора $\vec{\mu}$ в виде проекций на оси xyz, показанных на Рис. 4.	1.0pt

C.2	Найдите момент сил $\vec{M}$, действующий на сферическую оболочку. Приведите ответ для вектора $\vec{M}$ в виде проекций на оси xyz, показанные на Рис. 4.	0.3pt

Эволюция вращательного движения в магнитном поле Земли

Давайте выясним, как изменяется вращение ступени, движущейся по круговой полярной орбите с периодом обращения $T = 100$ min (Рис. 5). Будем считать, что характерное время переходного процесса много меньше, чем характерные времена процессов изменения динамики ступени вследствие взаимодействия с геомагнитным полем. Рассмотрим, что происходит после завершения переходных процессов. Положим, что в начальный момент времени ступень вращается с угловой скоростью ω_2 вокруг оси, перпендикулярной к плоскости орбиты.

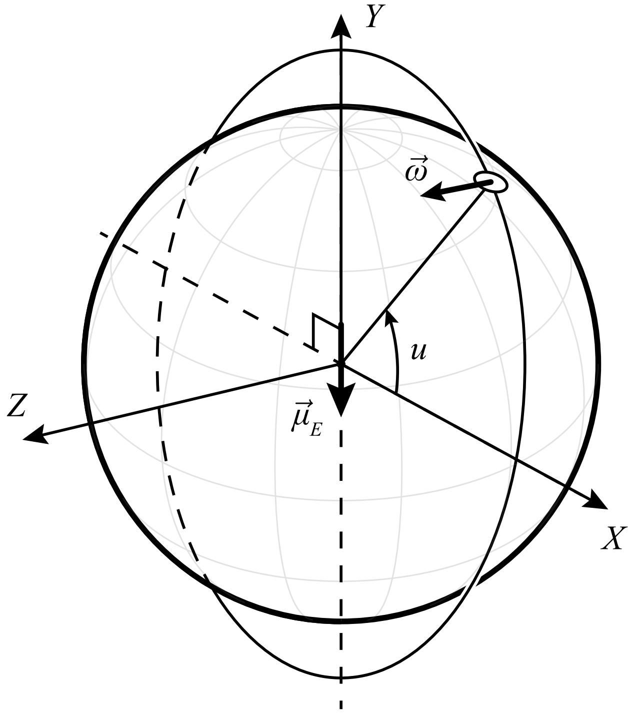


Рис. 5: Орбита ступени

C.3	Магнитное поле Земли $\vec{B}_E$ можно считать полем точечного диполя, помещенного в центр Земли. Дипольный момент равен $\vec{\mu}_E$ и направлен противоположно оси Y. Величина магнитного поля B в точке, где орбита ступени пересекает экваториальную плоскость XZ, равна $B_0 = 20\ \mu T$. Найдите магнитное поле $\vec{B}_E(u)$ в точке орбиты, характеризуемой углом u, как показано на Рис. 5. Положительное направление отсчета угла u совпадает с направлением движения по орбите. Ответ представьте в виде проекций $\vec{B}_E(u)$ на оси XYZ. *Примечание*: Для последующих вычислений может оказаться полезным, если проекции магнитного поля $\vec{B}_E(u)$ выразить как функции от $2u$ вместо функций от u. Магнитное поле диполя в точке, заданной вектором $\vec{r}$ можно записать как $$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3}\right). \qquad (1)$$	0.4pt

Считайте что ступень ракеты сделана в основном из дерева, за исключением топливного бака, выполненного из проводящего материала. Тогда взаимодействие ступени ракеты с геомагнитным полем может быть смоделировано как взаимодействие лишь со сферической оболочкой. Толщина стенок оболочки $D = 2\ mm$, радиус $R = 4\ m$ и удельное сопротивление $\rho = 2.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$.

C.4	Найдите момент сил $\vec{M}(u)$, действующих на ступень, которая вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости орбиты. Угловая скорость вращения ступени равна ω, она коллинеарна оси Z. Ответ для $\vec{M}(u)$ приведите в виде проекций на оси XYZ.	1.3pt

C.5	Считая изменение угловой скорости ступени за один период обращения по орбите пренебрежимо малым, найдите зависимость модуля угловой скорости $\omega(t)$ от времени.	1.0pt

C.6	Найдите отношение периода орбитального движения T к периоду вращения ступени ракеты T_s в установившемся режиме, спустя очень большой промежуток времени.	1.0pt