



Эволюция системы бинарных сверхмассивных черных дыр

Введение

Идея о существовании гравитационных волн является одним из самых удивительных предсказаний общей теории относительности Эйнштейна. Гравитационные волны - это пространственно-временное возмущение, распространяющееся подобно электромагнитным волнам со скоростью света. Прямое обнаружение гравитационных волн - невероятно сложная задача, однако 14 сентября 2015 года первый сигнал был обнаружен при сотрудничестве LIGO и VIRGO.

Гравитационные волны излучаются при быстром движении массивных объектов. Наиболее мощным источником гравитационных волн является событие слияния двух сверхмассивных черных дыр (далее - СЧД). Черные дыры, предсказанные общей теорией относительности, представляют собой чрезвычайно компактные объекты, массы которых могут быть очень большими. Другие особые свойства черных дыр в решении данной задачи не понадобятся.

В общепринятой теории эволюции галактик предполагается, что в центре галактики находится сверхмассивная черная дыра, обладающая массой, порядка $10^5 - 10^9$ масс Солнца. Галактиками называются звездные системы, содержащие $10^{10} - 10^{11}$ звезд. В процессе эволюции две галактики могут столкнуться и слиться в одну. Что же произойдет с двумя сверхмассивными черными дырами, первоначально находившимися в их центрах? Можно выделить *три основных этапа* эволюции системы, состоящей из двух сверхмассивных черных дыр. На каждом из трех этапов СЧД сближаются, хотя физические явления, лежащие в основе этих процессов, различны. Каждый из этих трех этапов будет изучен нами в первых трех заданиях. В четвертом задании мы будем использовать полученные ранее соотношения для расчета полного времени эволюции системы бинарных СЧД.

В конце процесса эволюции две сверхмассивные черные дыры сближаются и сливаются в одну черную дыру. Процесс слияния длится около часа и сопровождается мощным импульсом гравитационного излучения. Будущие обсерватории, такие как LISA, смогут задетектировать это излучение. Тем не менее, исследования эволюции сверхмассивных черных дыр ведутся уже сейчас, на заре эры астрономии гравитационных волн.

Общая информация

1. Выражайте все расстояния в парсеках (pc), а временные интервалы в гига годах (Gy). Мы будем использовать массу Солнца (M_S) в качестве единицы массы. Возможно, вам понадобятся следующие табличные значения:

$$1 \text{ pc} = 3.1 \times 10^{16} \text{ m},$$

$$M_s = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg},$$

$$t_H = 13.7 \text{ Gy}, \text{ возраст Вселенной},$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \times \text{m}^2/\text{kg}^2,$$

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

2. Когда мы пишем слово **«оцените»**, мы не требуем от вас точного ответа. Достаточно получить результат, который отличается от истинного не более, чем в 10 раз. Когда мы пишем **«найдите»**, мы подразумеваем точный ответ. Слово **«вычислите»** предполагают численный ответ.

3. В течение всей задачи будем считать, что все звезды в галактике имеют одинаковую массу $m = M_S$.

4. На протяжении всей задачи эффектами общей теории относительности можно пренебречь, за исключением явления излучения гравитационных волн. Все звезды и черные дыры будем считать



точечными телами, которые подчиняются законам Ньютоновской гравитации.

Задание А. Динамическое трение (1.6 балла)

В этом задании мы будем изучать упрощенную модель галактики. Вы можете не учитывать скорости звезд в галактике и считать концентрацию звезд n постоянной. R - характерный размер галактики. Концентрация звезд достаточно мала, поэтому столкновения звезд происходят чрезвычайно редко, и ими можно пренебречь. Рассмотрим сверхмассивную черную дыру с массой $M \gg m$, движущуюся со скоростью v через галактику. Удивительно, но средняя сила взаимодействия черной дыры со звездами отлична от нуля. По этой причине данная сила замедляет движение черной дыры и называется силой динамического трения. Это задание посвящено определению силы динамического трения.

- A.1** Перейдем в систему отсчета, связанную со сверхмассивной черной дырой. 0.75pt
 Рассмотрим движение одной звезды с прицельным параметром b (рис.1). Будем предполагать, что

$$b \gg b_1 = \frac{GM}{v^2}. \quad (1)$$

Угловое отклонение звезды равно $\alpha = kb_1/b$, где k - некоторый коэффициент. **Найдите** значение k . Если вы не можете найти значение k , примите $k = 1$ в дальнейшем.

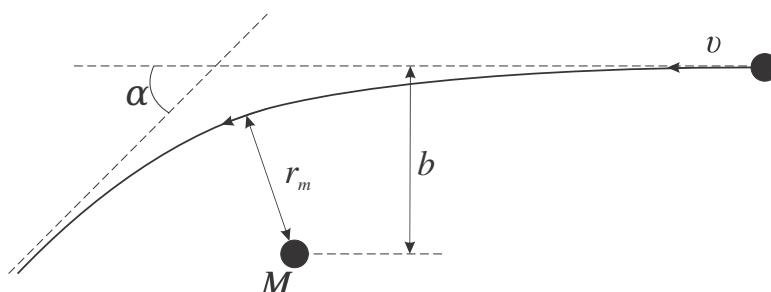


Рис. 1: Отклонение звезды при взаимодействии со сверхмассивной черной дырой массой M . b - прицельный параметр, r_m - минимальное расстояние между звездой и черной дырой.

- A.2** Пусть ось Ox направлена вдоль скорости черной дыры. **Найдите** проекцию на ось Ox импульса Δp_x , переданную звездой черной дыре. 0.25pt

- A.3** **Оцените** среднюю силу F_{DF} , действующую на черную дыру, путем усреднения по прицельному параметру b . Вкладом звезд с прицельными параметрами $b < b_1$ можно пренебречь. Предполагается, что черная дыра находится в центральной части галактики. Выразите F_{DF} через M , v , R , G , и плотность звезд $\rho = mn$. 0.4pt



- A.4** Полученное в предыдущей задаче выражение для F_{DF} содержит множитель $\log R/b_1$, который далее мы будем обозначать как $\log \Lambda$. **Вычислите** значение $\log \Lambda$ для $M = 10^8 M_S$, $R = 20 \text{ kpc} = 20 \times 10^3 \text{ pc}$ и скорости $v = 200 \text{ km/s}$. 0.2pt



Задание В. "Гравитационная рогатка"

В этом задании мы рассмотрим систему двух сверхмассивных черных дыр с равными массами $M \gg m$, расположенными в центре галактики. Будем называть эту систему **бинарной системой сверхмассивных черных дыр** (или просто **бинарной системой**). Будем считать, что вблизи бинарной системы нет звезд, каждая сверхмассивная черная дыра имеет круговую орбиту радиуса a в гравитационном поле другой сверхмассивной черной дыры.

В.1 Найдите орбитальную скорость v_{bin} каждой чёрной дыры. Найдите полную энергию E бинарной системы. Выразите их через a , G и M . 0.25pt

На расстояниях от бинарных систем намного больших, чем a , находится большое количество звезд. Звезды движутся по сложным и разнообразным траекториям в гравитационном поле всей галактики. Подобно движению молекул в идеальном газе, движение звезд можно считать хаотическим. Предположим, что скорости звезд имеют равные величины $\sigma \ll v_{bin}$, а средняя плотность звезд равна ρ . В этом случае динамическое трение больше не влияет на бинарную систему, и потери энергии будут вызваны другим явлением.

В.2 Решим вспомогательную задачу. Пусть звезда массой m движется по направлению к точечной массе $M_2 \gg m$, находящейся в состоянии покоя. r_m - минимальное расстояние между звездой и точечной массой в процессе движения. σ - скорость звезды на большом расстоянии от M_2 . Найдите точное значение прицельного параметра b . 0.5pt

Если звезда приближается к бинарной системе на расстояние около a , она участвует в сложном трехчастичном взаимодействии с бинарной системой, что почти всегда приводит к тому, что звезда вылетает со скоростью порядка v_{bin} (скорость звезды на большом расстоянии после взаимодействия). Такое "сильное" взаимодействие мы назовем столкновением звезды с бинарной системой. Ускорение и выброс звезды после столкновения называется **«гравитационной рогаткой»**.

В.3 Оцените характерное время Δt между двумя последовательными соударениями бинарной системы со звездами. Учтите, что $\sigma \ll v_{bin}$. 1.0pt

В.4 Оцените скорость потерь энергии бинарной системы dE/dt . Оцените скорость изменения радиуса da/dt . Выразите её через a , ρ , σ , G . 0.25pt

В.5 Пусть a_1 - начальный радиус системы. Оцените время T_{SS} , за которое радиус уменьшается в 2 раза за счёт "гравитационной рогатки". Вычислите T_{SS} при $\sigma = 200 \text{ km/s}$, $a_1 = 1 \text{ pc}$, $\rho = 10^4 M_S/\text{pc}^3$. 1.0pt



Задание С. Излучение гравитационных волн (1 балл)

В этом задании мы будем изучать бинарную систему с равными массами, которая никак не взаимодействует со звездами. Даже в этом случае система теряет энергию из-за излучения гравитационных волн. Скорость потерь энергии из-за гравитационных волн равна

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1024}{5} \frac{G}{c^5} (\omega^3 I)^2, \quad (2)$$

где ω - угловая скорость бинарной системы, $I = 2Ma^2$ - квадрупольный момент системы.

С.1 **Найдите** скорость изменения радиуса бинарной системы da/dt за счет излучения гравитационных волн. 0.2pt

Когда радиус a орбиты бинарной системы становится близким к гравитационному радиусу черной дыры:

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (3)$$

две черные дыры быстро сливаются.

С.2 Обозначим начальный радиус системы как $a_2 \gg r_g$. **Оцените** время T_{GW} , за которое бинарная система сжимается до радиуса r_g за счет излучения гравитационных волн. Выразите T_{GW} через a_2 , M , c и G . 0.7pt

С.3 **Вычислите** начальный радиус a_H бинарной системы с равными массами $M = 10^8 M_S$, время слияния которой равно возрасту Вселенной: $T_{GW} = t_H$. 0.1pt



Задание D. Полная эволюция (4.4 балла)

В этой части мы будем использовать результаты, полученные ранее. Рассмотрим **реальную** астрофизическую ситуацию. Две галактики, имеющие в своих центрах сверхмассивные черные дыры с массами $M = 10^8 M_S$, сливаются в новую звездную систему. Пусть новая галактика будет сферически симметричной с радиусом $R = 20 \text{ кpc} = 20 \times 10^3 \text{ pc}$. Предположим, что звездная плотность зависит от радиуса r от центра галактики по закону

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{4\pi G r^2}, \quad (4)$$

где $\sigma = 200 \text{ km/s}$.

- D.1** Пусть тело движется по круговой орбите радиусом $a < R$ в гравитационном поле звезд. Пренебрегая силой динамического трения, **найдите** скорость v тела. 0.25pt

Сразу же после слияния галактик две сверхмассивные черные дыры имеют произвольные положения внутри новой галактики и не влияют друг на друга. Давайте рассмотрим одну из черных дыр. Будем считать, что она движется по круговой орбите радиусом $a < R$ вокруг центра галактики и медленно теряет энергию из-за динамического трения.

- D.2** **Оцените** скорость изменения радиуса орбиты da/dt . В части А мы считали все звезды неподвижными. Хотя в реальной галактике звезды движутся, не все из них имеют одинаковые скорости σ . Скорости звезд совпадают с σ только по порядку величины, так же как и скорости черных дыр относительно звезд. Поэтому вы можете использовать результат, полученный в А.3 для оценки. Используйте выражение для плотности $\rho(r)$ из уравнения (4). Используйте значение $\log \Lambda$, вычисленное в А.4. 0.75pt

Через некоторое время две черные дыры приблизятся к центру галактики. Пусть они движутся по круговой орбите радиуса a вокруг центра галактики в гравитационном поле звезд.

- D.3** **Оцените** критический радиус a_1 при котором гравитационное взаимодействие между двумя черными дырами уже не пренебрежимо мало. **Вычислите** его. Будем говорить, что в этот момент две черные дыры образуют бинарную систему (рис.2). 0.3pt

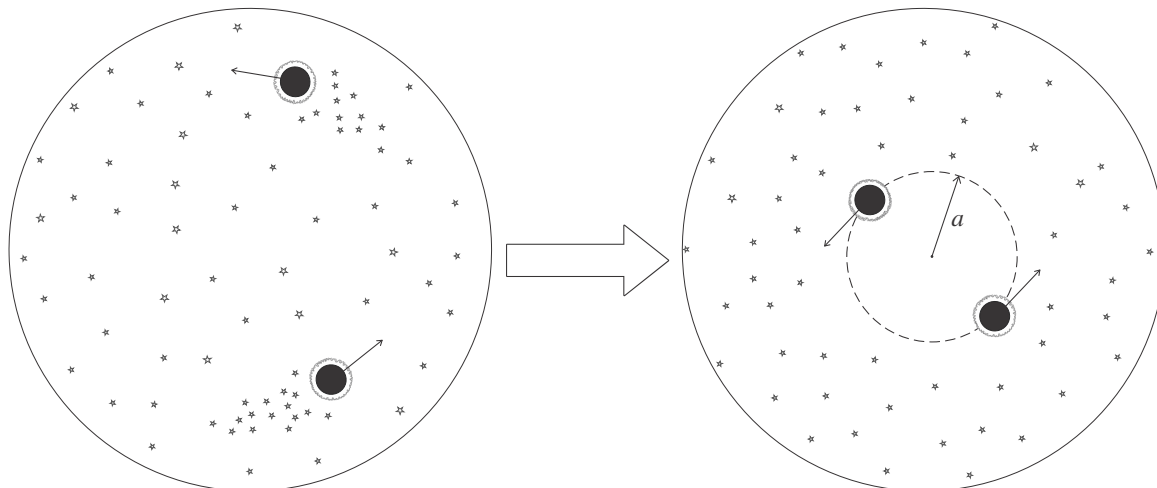


Рис. 2: Эволюция сверхмассивных черных дыр: до и после образования бинарной системы.

- D.4** Предположим, что после слияния галактик две чёрные дыры находились на расстоянии $a_0 = 2 \text{ кpc} = 2 \times 10^3 \text{ pc}$ от центра галактики. Из-за динамического трения образуется бинарная система. **Вычислите** время T_1 , которое требуется для образования бинарной системы. 0.75pt

После образования бинарной системы две чёрные дыры быстро выбрасывают все звезды от центра галактики и останутся там вдвоем. С этого момента динамическое трение становится не эффективным и бинарная система начинает терять энергию за счёт "эффекта рогатки". Будем считать скорости вращения звезд равными σ , а звездную плотность $\rho_1 = \rho(a_1)$ из уравнения (4). "Эффект рогатки" значительно уменьшает радиус системы, и через некоторое время система начинает терять энергию в основном из-за излучения гравитационных волн.

- D.5** Когда радиус бинарной системы меньше некоторого значения $a < a_2$ п 0.3pt

- D.6** **Оцените** время T_2 , за которое радиус бинарной системы изменяется от значения a_1 до значения a_2 (стадия "рогатки"). **Оцените** время T_3 , за которое радиус бинарной системы уменьшается от a_2 почти до нуля (стадия испускания гравитационных волн). 1.75pt

- D.7** Для параметров, приведенных выше, **вычислите** общее время эволюции T_{ev} от слияния галактик до слияния черных дыр. 0.3pt

Историческое замечание. Долгое время астрофизики думали, что эволюция слияния черных дыр останавливается на стадии рогатки, с того момента как бинарная система выбила все звезды с небольшими прицельными параметрами, которые могли бы столкнуться с ней. Казалось, что две черные дыры никогда не сольются. Этот факт был назван **проблемой последнего парсека**.

Реальные галактики имеют сложные асимметричные формы. Несколько лет назад было обнаружено, что в галактиках сложных форм звезды с малыми параметрами удара появляются снова и снова. Бинарная СЧД продолжает терять энергию, но медленнее, чем дает наша оценка. Проблема последнего парсека была успешно решена.