

Вихри в сверхтекучей жидкости

Введение

Сверхтекучесть - это свойство жидкости течь без трения. Повседневный опыт говорит нам, что при движении обычной жидкости (например, воды при комнатной температуре) всегда возникает вязкое трение, приводящее к диссипации энергии так, что поток постепенно замедляется, если он не поддерживается внешними силами. Напротив, сверхтекучая жидкость не теряет кинетической энергии: однажды возбужденное движение сверхтекучей жидкости может продолжаться бесконечно долго. Сверхтекучесть была первоначально экспериментально обнаружена в жидком гелии.

Мы будем рассматривать свойства сверхтекучего гелия при нулевой температуре. Будем считать, что это несжимаемая жидкость с плотностью ρ , которая обладает свойством непрерывности (масса вытекающая в заданный бесконечно малый объем, и вытекающая из него, одинакова). Это позволяет утверждать, что поток вектора скорости гелия \vec{v} через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю. Отсюда можно сделать вывод, что скорость сверхтекучей жидкости аналогична индукции магнитного поля. Аналогично линиям индукции магнитного поля, "линии тока" в каждой своей точке направлены по касательной к скорости и их плотность пропорциональна величине скорости.

Истинное сверхтекучее движение является безвихревым, т.е. циркуляция вектора скорости \vec{v} по любому замкнутому контуру внутри гелия равна нулю

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1)$$

Однако это выражение необходимо изменить, если сверхтекучесть отсутствует вдоль тонкой "вихревой нити" или "вихря". Толщина нити имеет приблизительно атомарные размеры a , вокруг нее создаются потоки жидкости на больших расстояниях (дальняя зона). Циркуляция вектора скорости вокруг такой нити равна кванту циркуляции.¹

$$\left| \int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} \right| = 2\pi\kappa, \quad (2)$$

и равна нулю если контур не охватывает ни одну вихревую нить (см. рис. 1). Это подтверждает аналогию между полем векторов скоростей сверхтекучей жидкости и магнитным полем, создаваемым проводами с током: для полей векторов скоростей выполняется принцип суперпозиции (сумма двух полей скоростей также дает поле скоростей), и скорость в любой точке равна (с точностью до размерного коэффициента) индукции магнитного поля, создаваемого электрическими токами, текущими через систему проводов, соответствующих вихревым нитям.

¹Такое квантование является макроскопическим квантовым эффектом и соответствует квантованию момента импульса в модели Бора. Квант циркуляции скорости может быть записан как $\kappa = \hbar/m_{\text{He}}$, где m_{He} масса атома гелия.

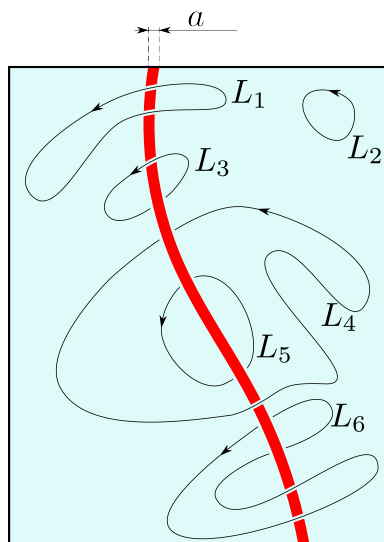


Fig. 1: Вихревая нить (красная линия) в сверхтекучей жидкости (светло голубой фон). Значение циркуляции вектора скорости вдоль траекторий L_1 , L_2 , L_5 и L_6 равно нулю, циркуляция вдоль L_3 и L_4 равна $\pm 2\pi\kappa$. Важно отметить, что циркуляции вектора скорости вдоль траекторий L_3 и L_4 имеют разные знаки.

Задание А. Покоящийся вихрь (0.75 балла).

Рассмотрим цилиндрический сосуд (радиусом $R_0 \gg a$) со сверхтекучим гелием и прямой вертикальной вихревой нитью в ее центре (рис. 2).

A.1 Нарисуйте линии тока. Найдите скорость v в точке с радиус-вектором \vec{r} . 0.25pt

A.2 Найдите форму свободной поверхности, которая образуется вокруг вихревой нити, т.е. зависимость высоты от расстояния до оси $z(\vec{r})$. Ускорение свободного падения g . Поверхностным натяжением можно пренебречь. 0.5pt

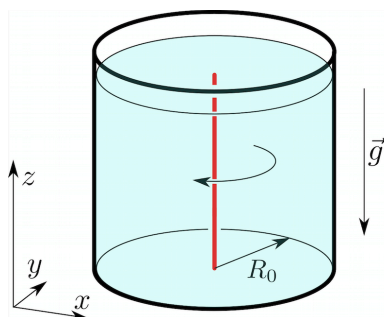


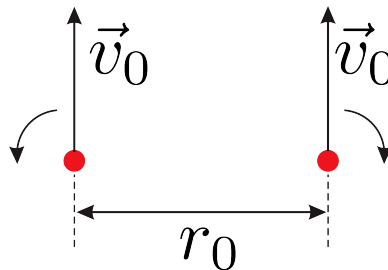
Рис. 2. Вихревая нить вдоль оси цилиндрического сосуда.



Задание В. Движущиеся вихри (1.4 балла).

Свободные вихри движутся в пространстве вместе с потоком². Другими словами, каждый элемент вихревой нити движется со скоростью \vec{v} , равной скорости жидкости, которая должна была быть на месте этого элемента.

Для примера, рассмотрим два вихря, вращающихся противоположно друг другу и расположенных на некотором заданном начальном расстоянии r_0 друг от друга (см. рис. 3). Каждый вихрь создает движение жидкости со скоростью $v_0 = \kappa/r_0$ в точке, в которой располагается ось другого вихря. В результате, эти два вихря движутся прямолинейно и с постоянной скоростью $v_0 = \kappa/r_0$, поэтому расстояние между ними не изменяется.



Параллельно движущиеся вихри с противоположной циркуляцией.

- | | |
|--|--------|
| <p>В.1 Рассмотрим два одинаковых вихря, которые вначале расположены на расстоянии r_0 друг от друга, как показано на рис. 4. Найдите начальные скорости вихрей и изобразите их траектории.</p> | 0.25pt |
|--|--------|

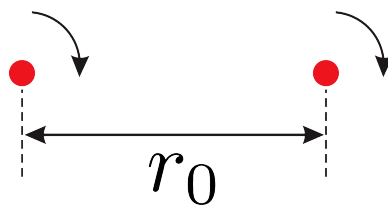


Рис. 4. Две параллельные вихревые нити с одинаковыми циркуляциями.

Цилиндрическая емкость с гелием (см. Задание А), заполнена треугольной решеткой ($u \ll R_0$) из одинаковых вертикальных вихревых нитей (см. рис. 5).

²Это является следствием закона сохранения импульса, см. следующий раздел

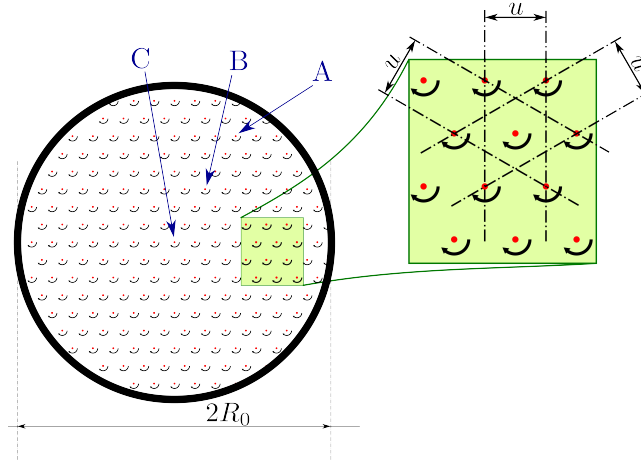


Рис. 5: Треугольная решетка вихрей в цилиндрическом сосуде. Вид сверху.

B.2	Нарисуйте траектории вихрей A, B и C (расположенного в центре).	0.15pt
B.3	Найдите скорость $v(\vec{r})$ вихря расположенного в точке с радиус-вектором \vec{r} .	0.4pt
B.4	Найдите зависимость расстояния $AB(t)$ между вихрями A и B от времени t . Считайте $AB(0)$ в начальный момент времени заданным.	0.35pt
B.5	Найдите сглаженную форму свободной поверхности гелия $z(\vec{r})$, не учитывая решетчатую структуру	0.25pt

Задание С. Импульс и энергия.

Поле скоростей в дальней зоне, т.е. расположенных на расстоянии намного большем, чем размер вихря дает основной вклад в энергию системы вихрей. Поэтому она нечувствительна к точной структуре вихревых нитей. Сама вихревая нить не может быть правильно описана макроскопической теорией, поэтому мы считаем, что возникающие сингулярности (бесконечности) несущественны. В действительности, величиной энергии внутри тонкой трубки с радиусом a вокруг вихревой нити можно пренебречь. Вне этой трубки плотность кинетической энергии сверхтекучей жидкости $\rho v^2/2$ (где $\rho = \text{const}$) подобна плотности энергии магнитного поля $B^2/(2\mu_0)$ — они обе квадратичны по соответствующим переменным. Эта аналогия вместе с соответствием между магнитным полем и скоростью сверхтекучей жидкости, а также вихревыми нитями и токами, облегчает расчет кинетической энергии для заданной системы. Например, для случая круговой проводочной петли с током радиусом R с радиусом провода a величина индуктивности $L \approx \mu_0 R \log(R/a)$, отсюда мы получаем энергию сверхтекучей вихревой петли (вихревого кольца)³

$$U \approx 2R\rho\pi^2\kappa^2 \log(R/a) \quad (3)$$

Полный импульс жидкости также определяется распределением скоростей в дальней зоне. Он получается интегрированием плотности импульса $\rho\vec{v}$. Снова рассмотрим поток, созданный вихре-

³Это выражение также справедливо, только если $\log R/a \gg 1$.



вым кольцом, расположенной в плоскости xy . Из соображений симметрии очевидно, что полный импульс имеет компоненту отличную от нуля только вдоль оси z :

$$P = \int \rho v_z dV = \rho \int \int \underbrace{\left(\int v_z dz \right)}_{q(x,y)} dx dy \quad (4)$$

Внутреннее интегрирование это интегрирование вдоль линий направленных параллельно оси z (см. Рис. 6). Из тождества (2) следует, что внутренний интеграл

$$q(x,y) = \int_{L(x,y)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (5)$$

может принимать только два значения, а именно ноль - для линий проходящих вне кольца и $2\pi\kappa$ для линий проходящих внутри кольца. Поэтому полный импульс равен

$$P = \rho \cdot \pi R^2 \cdot 2\pi\kappa = 2\pi^2 \rho R^2 \kappa \quad (6)$$

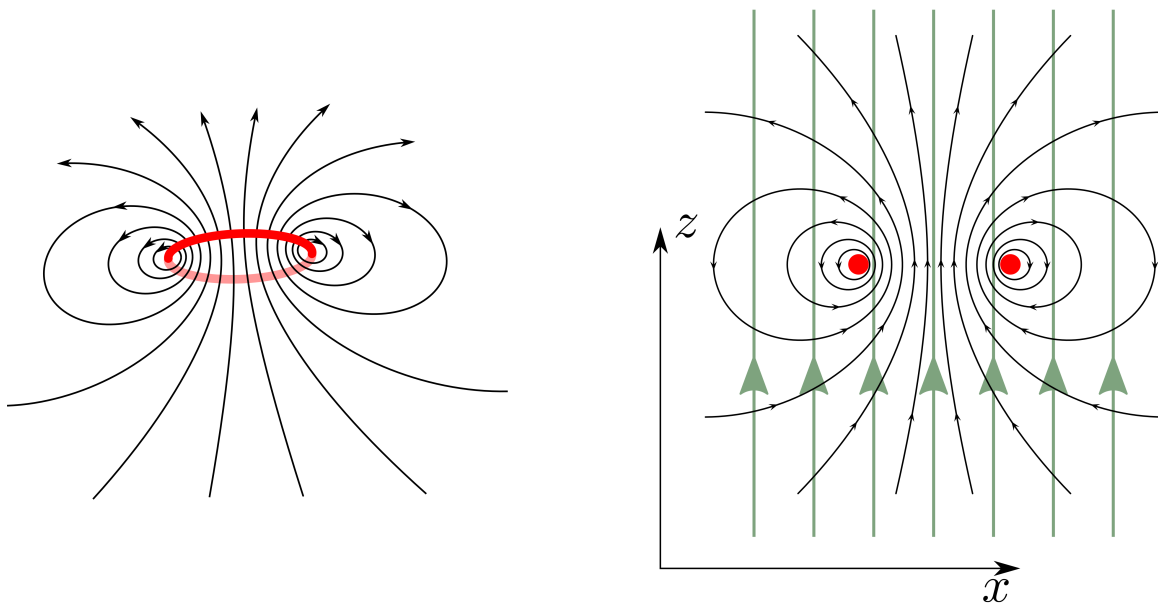


Рис. 6: Поле скоростей для вихревого кольца и линии интегрирования (обозначены зеленым цветом) для вычисления $q(x,y)$.

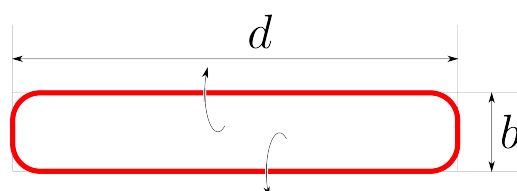


Fig. 7: Вихревая петля в форме близкой к прямоугольной, $b \ll d$.



C.1 Рассмотрим вихревую петлю в форме близкой к прямоугольнику с размерами $b \times d$, $b \ll d$, Рис. 7. Укажите направление ее полного импульса \vec{P} . Найдите величину полного импульса. 0.3pt

C.2 Найдите энергию этой петли U . 0.7pt

C.3 Предположим, что мы сдвинули длинную прямую вихревую нить на расстояние b в направлении оси x , см. Рис.8. Насколько изменился полный импульс жидкости? Укажите направление изменения полного импульса жидкости. Длина нити (ограниченная стенками сосуда) равна d . 0.75pt

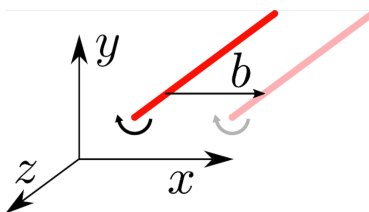


Рис. 8: Импульс изменяется всегда, когда вихрь смещается относительно жидкости.

Задание D. Захваченные заряды (2.85 балла)

Если электроны поместить в гелий, то они будут "захвачены" в вихревую нить. Здесь и далее пренебрегаем диэлектрической проницаемостью гелия ($\epsilon = 1$).

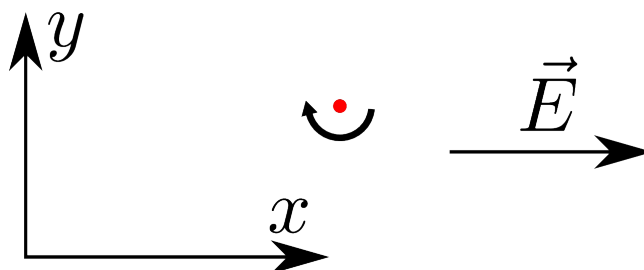


Fig. 9: Прямая вихревая нить в однородном электрическом поле.

D.1 Рассмотрим прямую вихревую нить, заряженную с постоянной линейной плотностью $\lambda < 0$ и помещенную в однородное электрическое поле \vec{E} . Изобразите траекторию движения нити. Найдите зависимость ее скорости от времени. 0.5pt

Вихревое кольцо радиуса R_0 , первоначально с однородно распределенным зарядом с линейной плотностью $\lambda < 0$ помещена в однородное электрическое поле \vec{E} перпендикулярное к ее плоскости и направленное противоположно вектору полного импульса \vec{P}_0 .

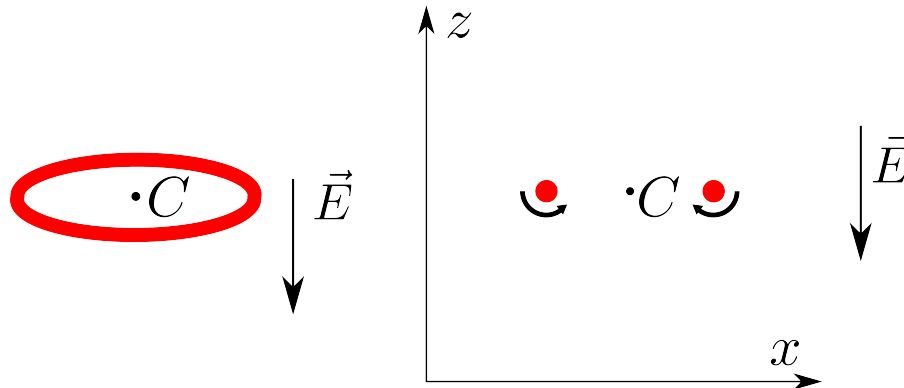


Рис. 10: (слева) Вихревое кольцо в однородном электрическом поле. (справа) Поперечное сечение кольца.

- | | | |
|------------|--|--------|
| D.2 | Нарисуйте траекторию движения центра вихревого кольца C . Найдите зависимость радиуса кольца от времени. | 0.6pt |
| D.3 | Найдите зависимость скорости центра кольца $v(t)$ от времени. | 1.5pt |
| D.4 | В некоторый момент времени t^* , когда скорость достигает значения $v^* = v(t^*)$, электрическое поле выключают. Найдите скорость $v(t)$ вихревого кольца в моменты времени $t > t^*$. | 0.25pt |

Задание Е. Влияние границ (3.25 балла)

Твердые стенки изменяют поле скоростей, создаваемое вихревой нитью, потому что жидкость не может протекать сквозь них. Математически это означает, что составляющая скорости, направленная перпендикулярно к стенке, обращается в ноль на ее поверхности.

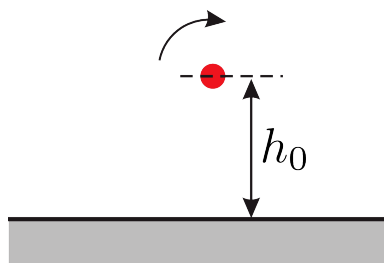


Рис. 11: Прямолинейная вихревая нить возле плоской стены.

- | | | |
|------------|--|-------|
| E.1 | Нарисуйте траекторию прямолинейного вихря, первоначально расположенного на расстоянии h_0 от плоской стены. Найдите зависимость скорости от времени. | 0.5pt |
|------------|--|-------|

Рассмотрим прямолинейный вихрь расположенный в углу на расстоянии h_0 от обеих плоских стенок.

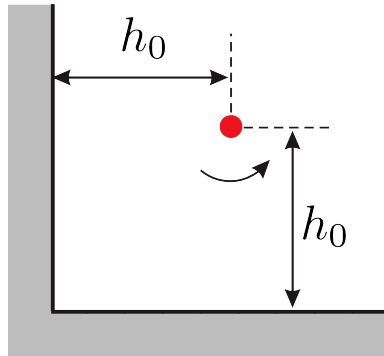


Рис. 12: Прямолинейная вихревая нить в углу.

- | | | |
|------------|---|--------|
| E.2 | Чему равна начальная скорость v_0 вихря? | 0.75pt |
| E.3 | Изобразите траекторию вихря. | 0.5pt |
| E.4 | Чему равна скорость вихря v_∞ спустя очень большой промежуток времени? | 1.5pt |