



## Фотонные кристаллы (20 баллов, 5 часов)

### Введение

Фотонные кристаллы являются материалами, показатель преломления которых периодически изменяется на масштабах, сравнимых с длиной волны света. В оптическом спектре фотонных кристаллов существуют узкие области длин волн, для которых распространение света подавляется. Эти необычные оптические свойства используются для создания разнообразных оптических элементов на основе фотонных кристаллов (оптических фильтров, отражателей).

В данной работе вам предлагается изучить свойства фотонных кристаллов на примере пористых (содержащих воздушные каналы) пленок оксида алюминия. Структура образцов, полученных с помощью электрохимического окисления (анодирования) алюминия, может быть представлена как система несвязанных цилиндрических каналов, расположенных перпендикулярно поверхности образца (Рис. 1).

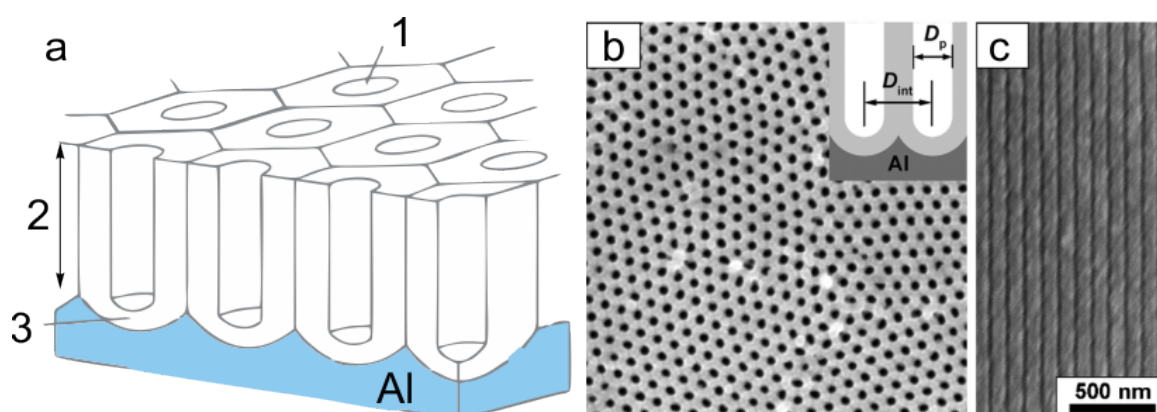


Рис. 1. (а) Схематическая структура пористой пленки оксида алюминия: (1) пора, (2) пористый слой, (3) барьерный слой. Изображение пленки, полученное с помощью электронного микроскопа: (b) вид сверху, (c) поперечное сечение [Electrochim. Acta, 2011, 56, 2378].

Диаметр пор и расстояние между ними зависят от условий электрохимической обработки, позволяющей получать структуры с переменной пористостью перпендикулярно поверхности оксидной пленки, благодаря изменению напряжения во время анодирования (Рис. 2).

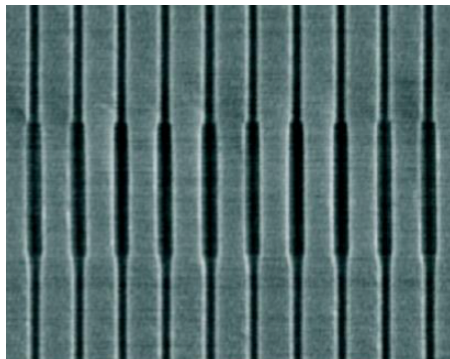


Рис. 2.: Изображение поперечного разреза анодного оксида алюминия, полученное с помощью электронного микроскопа [Nat.Mater., 2006, 5, 741].

Диаметры пор образцов, исследуемых в данной работе, меньше 30 нм. Пористая среда с таким маленьким диаметром поры становится непрерывной для электромагнитных волн в оптическом диапазоне, что позволяет описывать её эффективным (усредненным по объему) показателем преломления.

Изменение пористости оксидной пленки приводит к изменению её показателя преломления. Заметим, что показатель преломления исследуемых образцов периодически изменяется только в одном направлении: перпендикулярно поверхности пленки. Поэтому изучаемые образцы являются *одномерными фотонными кристаллами*.

Следует отметить, что тонкие плёнки анодного оксида алюминия с постоянным диаметром оптически прозрачны, тогда как фотонные кристаллы окрашены благодаря явлению интерференции света в их слоистой структуре.

В процессе работы вы проведете оптические исследования трех образцов фотонных кристаллов на основе анодного оксида алюминия (ААО) со структурами различной сложности.

Используемое оборудование

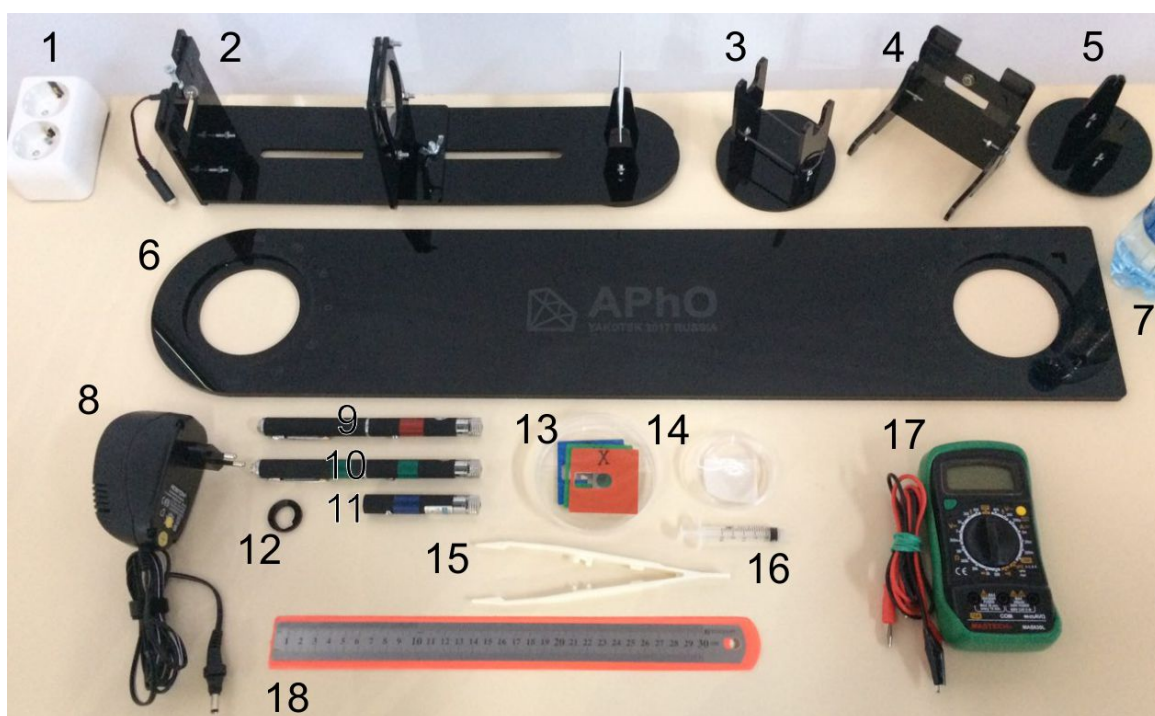


Рис. 3. Используемое оборудование.

1. Розетка
2. Скамья с источником света и дифракционной решеткой для спектральных измерений (далее - спектральное плечо)
3. Держатель для лазера с резинкой
4. Фотодиод с держателем
5. Держатель образца
6. Оптическая скамья с транспортирами (далее оптическая скамья)
7. Бутылка воды
8. Источник питания
9. Красный лазер (длина волны 659 нм)
10. Зеленый лазер (длина волны 530 нм)
11. Синий лазер (длина волны 400 нм)

**Лазерное излучение опасно! Не светите лазером себе в глаза ни при каких обстоятельствах! Остерегайтесь отраженных лучей!**

12. Фиксатор кнопки включения лазера



13. Чашка Петри с тремя фотонными кристаллами в квадратных цветных рамках

**Фотонные кристаллы очень хрупкие! Не прикасайтесь к кристаллам! Держите образцы только за рамки! Новые образцы предоставляться не будут!**

14. Чашка Петри с покровной стеклянной пластинкой

**Стекло тонкое и хрупкое! Берите его только при помощи пинцета! Руками не трогать!**

15. Пинцет для покровного стекла

16. Шприц

17. Мультиметр

18. Линейка

### Спектральное плечо

Для проведения спектральных измерений с различными длинами волн вам понадобится спектральное плечо (рис. 4). Спектральное плечо состоит из лампы накаливания (L), дифракционной решетки с держателем (DG) и подвижной линзы (F) между ними. Для установки спектрального плеча поместите диск в левое отверстие в оптической скамье.

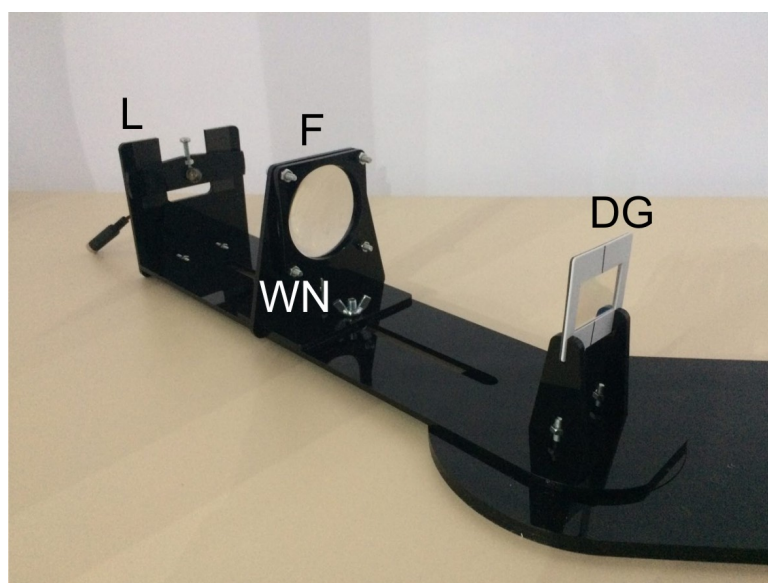


Рис. 4.: Спектральное плечо

Первоначально лампа находится в центре, хотя при необходимости её положение регулируется. Убедитесь, что нить накала расположена вертикально для получения более тонкой спектральной



линии после дифракционной решетки.

Изменяя положение линзы, вы можете регулировать угол расходимости пучка. Для этого открутите гайку (WN), переместите держатель линзы в необходимое положение, снова затяните гайку (не затягивайте ее слишком сильно, небольшого усилия достаточно, чтобы предотвратить случайное движение линзы).

### Включение лампы и лазера

Для включения источника света вставьте вилку источника питания в розетку на столе. Подсоедините провод от источника питания к разъему лампы или лазера. Для лазеров важна полярность. Изначально она установлена правильно.

### Лазеры

Вам выданы три лазера, промаркированные цветными лентами: красный ( $\lambda = 659$  нм), зеленый ( $\lambda = 530$  нм) и синий ( $\lambda = 400$  нм).

**Лазерное излучение опасно! Не светите лазером себе в глаза ни при каких обстоятельствах! Опасайтесь отраженных лазерных лучей!**

Красный и синий лазеры имеют одно крепление для питания. Для переключения с красного на синий лазер отвинтите крепление от красного лазера и привинтите его к синему (рис. 5a).

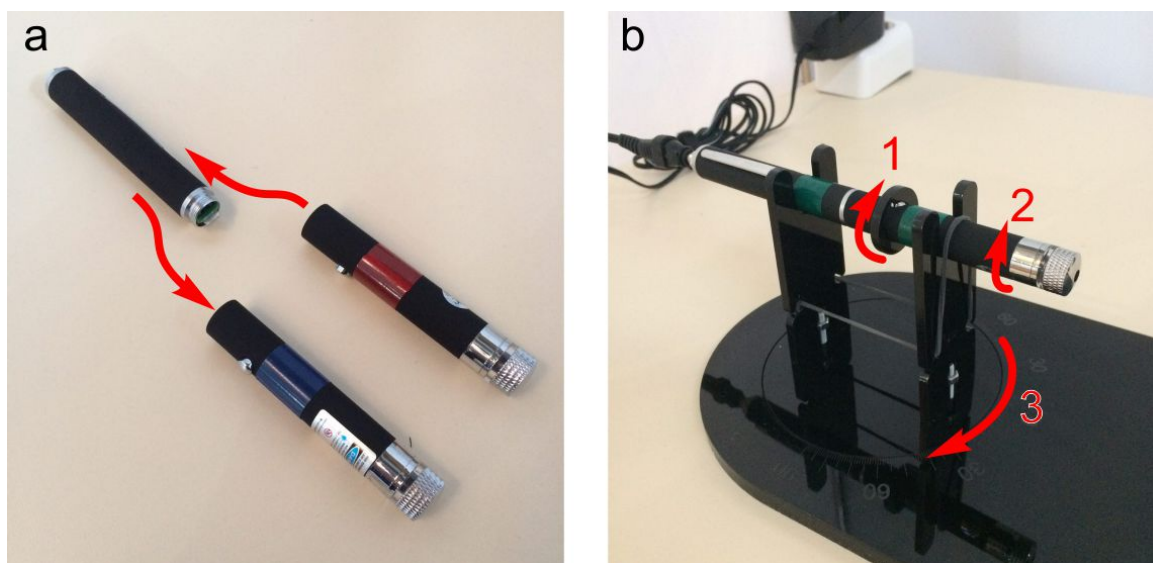
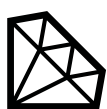


Рис. 5: (a) Переключение питания. (b) Установка лазера и регулировка лазерного луча.

Для проведения эксперимента наденьте фиксатор кнопки включения на лазер, поместите лазер в держатель и закрепите его резинкой (рис. 5b). Вставьте диск держателя в левое отверстие оптической скамьи. Для включения лазера поверните фиксатор кнопки включения (1).



Вам может потребоваться отрегулировать положение луча лазера. Вначале вращайте лазер вокруг своей оси до тех пор, пока луч не окажется в горизонтальной плоскости (2).

Затем поверните диск держателя, чтобы выровнять луч относительно оптической скамьи (3).

## Фотодиод

Для измерения интенсивности проходящего излучения вам понадобятся лазеры и фотодиод. Поместите ножки держателя фотодиода в соответствующие отверстия оптической скамьи (рис. 6а).

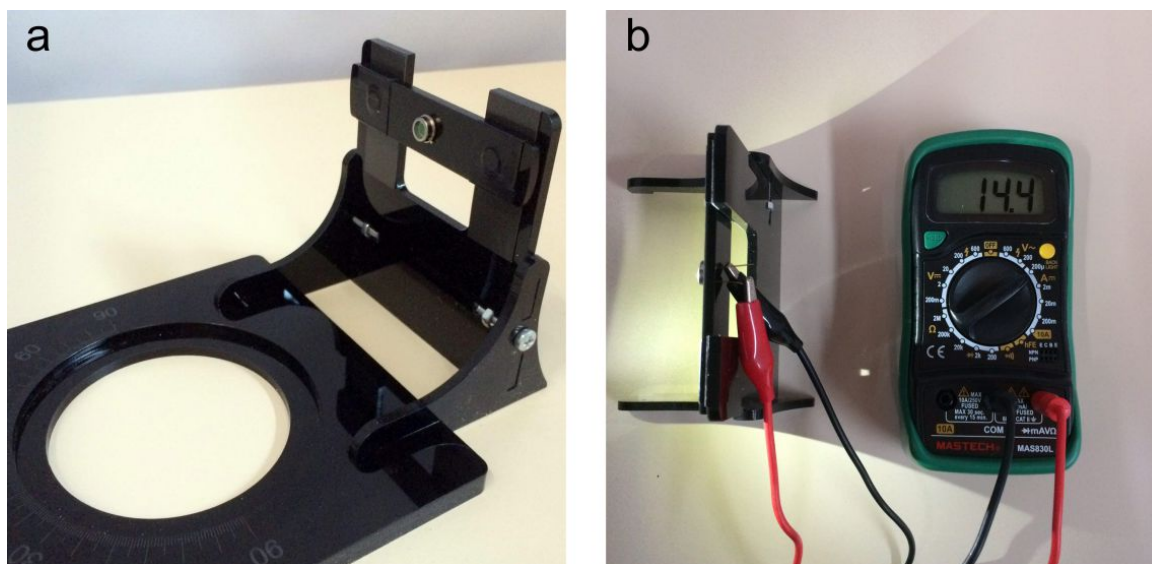


Рис. 6: (а) Подставка для светодиода. (б) Подключение мультиметра.

Фотодиод крепится к держателю с помощью магнита, его положение может регулироваться.

Для проведения измерений с фотодиодом подключите его к мультиметру в режиме постоянного тока ( $\mu\text{A}$ ) (рис.6b). Ток фотодиода пропорционален интенсивности падающего света, поэтому мы будем измерять интенсивность света в  $\mu\text{A}$ .

## Образцы фотонных кристаллов

**Фотонные кристаллы очень хрупкие! Не прикасайтесь к кристаллам! Держите образцы только за рамку!**

Вам выданы три образца различных фотонных кристаллов. Лицевые стороны рамок обозначены разными буквами, в соответствии с названием образца (X, Y, Z) и имеют разный цвет. При размещении образца в держателе проверьте, что луч падает на лицевую поверхность, а буква расположена в верхней части рамки. Для проведения измерений поместите диск держателя в правое отверстие оптической скамьи. Вращайте диск держателя только по часовой стрелке, чтобы отвести отраженный луч света.

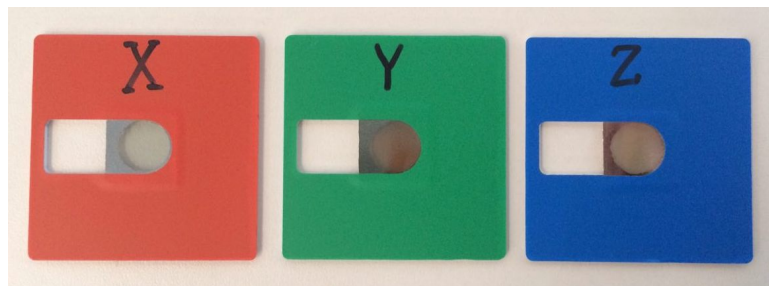
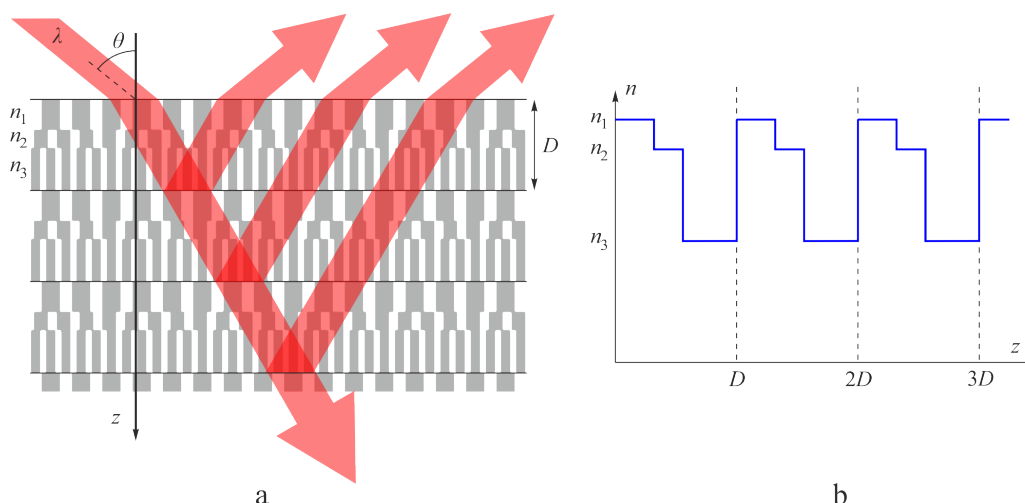


Рис. 7. Образцы фотонных кристаллов.

### Закон Брэгга-Снелла

Рис. 8. (a) Структура фотонного кристалла. (b) Зависимость показателя преломления  $n(z)$ .

Образцы фотонных кристаллов, исследуемые в данной задаче, состоят из слоев с разными показателями преломления  $n_i$ . Показатель преломления периодически изменяется вдоль оси  $z$  с периодом  $D$  и не зависит от длины волны  $\lambda$ . Обозначим средний показатель преломления  $n$ , а изменение показателя преломления  $\Delta n = n_{\max} - n_{\min}$ . В кристаллах ААО

$$\Delta n \ll n. \quad (1)$$

Рассмотрим параллельный монохроматический пучок с постоянной интенсивностью и длиной волны  $\lambda$ , падающий на фотонный кристалл. Угол падения равен  $\theta$ . Пучки, отраженные от разных слоев, интерферируют между собой. В результате интерференционная картина в отраженном свете имеет максимумы при определенных углах  $\theta$ , которые определяются условием:

$$2D\sqrt{n^2 - \sin^2\theta} = m\lambda, \quad (2)$$

где  $m = 1, 2, \dots$  целые числа, означающие порядок интерференции.



Выражение (2) называется **законом Брэгга-Снелла**. Минимумы пропускания наблюдаются при тех же углах  $\theta$ . Если угол остается постоянным, а длина волны  $\lambda$  изменяется, закон Брэгга-Снелла можно использовать, как уравнение для нахождения  $\lambda$ . На рис. 9. представлены спектры отражения и пропускания. Каждый минимум пропускания соответствует целому числу  $m$  в законе Брэгга-Снелла.

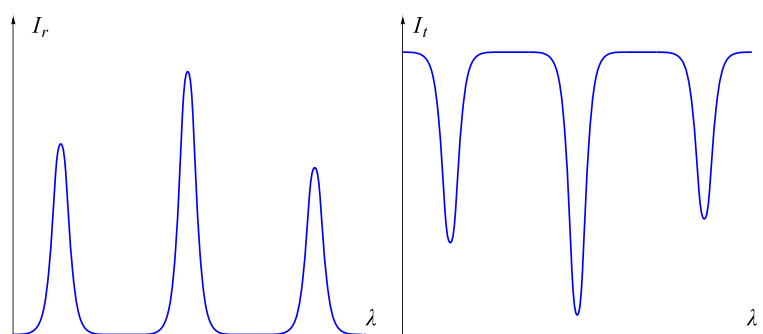


Рис. 9: Спектры отражения и пропускания

Длины волн, удовлетворяющие закону Брэгга-Снелла (2), будем называть **длинами волн минимумов пропускания**. Длины волн минимумов пропускания зависят от угла падения  $\theta$ . Длины волн минимумов пропускания при  $\theta=0$  будем называть **нормальными длинами волн минимумов пропускания** для данного фотонного кристалла.





В этой задаче не требуется рассчитывать погрешность измерений.

### Задание А. Образец X. Спектральные измерения. (3,5 балла)

Образец X имеет простую структуру (рис.10). Его период состоит из двух слоев с одинаковой толщиной  $D_X/2$  и с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  мало отличающимися друг от друга:

$$n_1 - n_2 = \Delta n \ll n_X = \frac{n_1 + n_2}{2} \quad (3)$$

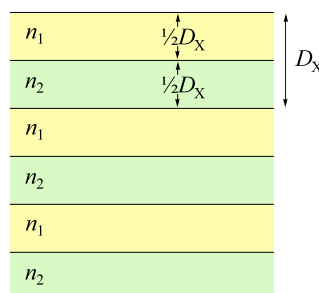


Рис. 10: Структура образца X.

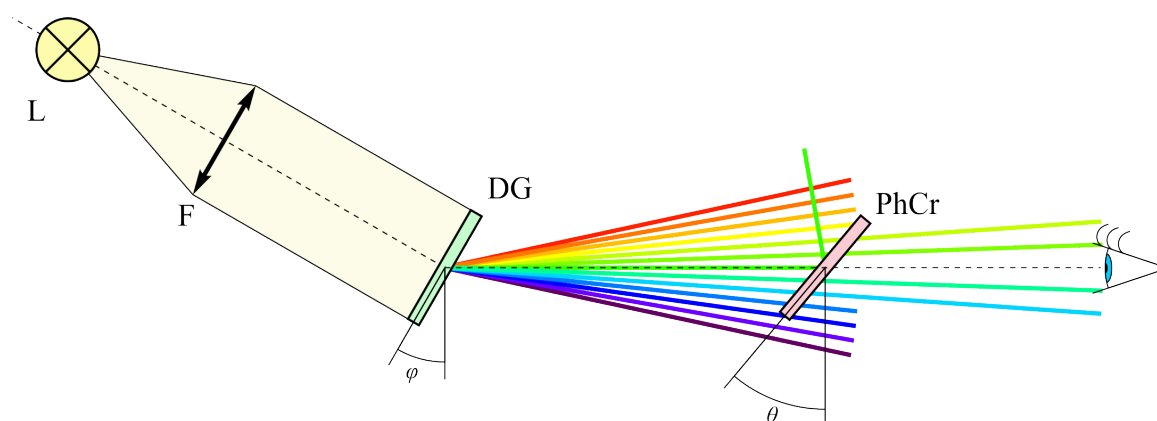


Рис. 11. Схема экспериментальной установки для проведения спектральных исследований: (F) линза, (L) лампочка, расположенная в фокусе линзы, (DG) дифракционная решетка, (PhCr) фотонный кристалл.

1. Соберите **экспериментальную установку для спектральных измерений**. Поместите скамью с источником света и дифракционной решеткой для спектральных измерений (спектральное плечо) в левое отверстие оптической скамьи с транспортирами.
2. Включите лампу. Посмотрите на свет от лампочки сквозь дифракционную решетку на другом конце оптической скамьи. Вращайте спектральное плечо до тех пор, пока не увидите



первый дифракционный максимум (полоску радуги).

3. Установите держатель образца в правое отверстие оптической скамьи (установите треугольную метку на ноль). Поместите образец X в держатель (свет должен падать на красную лицевую поверхность). Посмотрите на радужную полоску после дифракционной решетки через образец (спектр пропускания).

4. Если вы будете вращать по часовой стрелке образец, то вы сможете увидеть темную полосу в спектре пропускания (рис. 12). Это **минимум пропускания** соответствующий  $m = 1$  в законе Брэгга-Снелла. Когда вы вращаете образец, длина волны минимума пропускания изменяется.

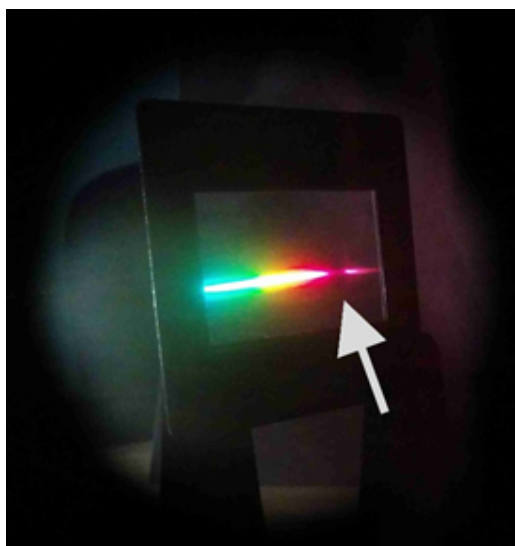


Рис. 12. Фотография спектра пропускания образца X. Белая стрелка показывает минимум пропускания (темная область в полоске радуги).

5. Перемещая линзу, вы можете наблюдать более широкую или узкую часть спектра. Для точных измерений расположите линзу таким образом, чтобы лампочка была расположена в фокусе.

<b>A.1</b>	Свет падает на дифракционную решетку перпендикулярно к ее поверхности. Запишите уравнение, связывающее направление на максимумы $\varphi$ и длину волны $\lambda$ . Период решетки $h = 1000$ нм. Вы можете записать ответ без вывода.	0.1pt
------------	--	-------

<b>A.2</b>	Измерьте зависимость угла падения $\theta$ от угла дифракции $\varphi$ . Подбирайте угол $\theta$ таким образом, чтобы минимум пропускания (темная полоска) был расположен посередине дифракционной решетки.	1.0pt
------------	--	-------

<b>A.3</b>	Подберите новые координаты вместо $\theta$ от $\varphi$ таким образом, чтобы зависимость была линейной. Нарисуйте график в новых координатах.	1.5pt
------------	---	-------

Experiment



**APhO**  
YAKUTSK 2017 RUSSIA

# Q1-11

Russian (Russia)

**A.4** Определите период образца  $D_X$  и средний показатель преломления  $n_X$ . 0.9pt



## Задание В. Образец X. Измерения с лазером (5 баллов)

Пористость кристалла  $p$  это доля объема кристалла заполненного воздухом (в воздушных каналах). Эффективный показатель преломления может быть выражен через показатель преломления воздуха  $n_a = 1$  и показатель преломления оксида алюминия  $n_{AAO}$ :

$$n_{dry} = \sqrt{pn_a^2 + (1-p)n_{AAO}^2}. \quad (4)$$

Если каналы заполнить водой, то показатель преломления кристалла изменится:

$$n_{wet} = \sqrt{pn_w^2 + (1-p)n_{AAO}^2}, \quad (5)$$

где  $n_w = 1.33$  показатель преломления воды.

В этом задании мы будем определять пористость  $p$  фотонного кристалла, сравнивая результаты экспериментов для "сухого" образца и образца заполненного водой. Мы будем использовать установку с лазером в качестве источника света.

- В.1** Выберите лазер таким образом, чтобы можно было наблюдать минимум пропускания при некотором значении угла поворота образца  $\theta$ . Запишите длину волны лазера, который вы выбрали. 0.1pt

Используйте выбранный лазер во всех заданиях части В.

Соберите экспериментальную установку для измерений с лазером (рис.13).

**Не допускайте попадания лазерного пучка вам в глаза! Следите за отраженными лучами, они также не должны попадать вам в глаза. Даже короткая экспозиция может серьезно повредить ваше зрение. Не держите голову на уровне луча, когда вы проводите какие-либо эксперименты с лазерным излучением.**

Перед проведением измерений с лазерным излучением убедитесь, что интенсивность лазера постоянна. Если это не так, подождите 3-5 минут.

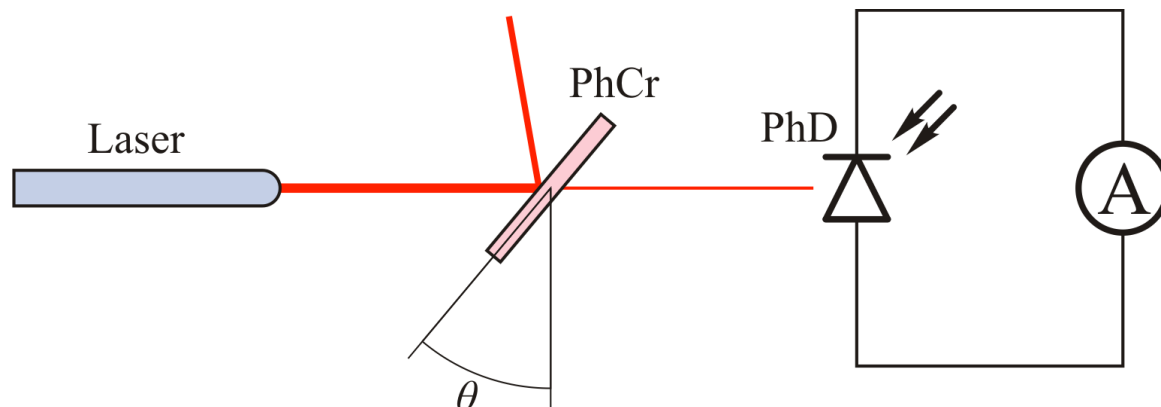


Рис. 13. Установка для проведения измерений с лазерным излучением: (Laser) лазер, (PhCr) фотонный кристалл, (PhD) фотодиод, подключенный к амперметру. Ток, измеряемый амперметром, пропорционален интенсивности света, падающего на фотодиод.

**B.2** Измерьте зависимость интенсивности лазерного излучения  $I_t$  (в  $\mu\text{A}$ ), прошедшего через фотонный кристалл, от величины угла  $\theta$ . 1.0pt

**B.3** Постройте график зависимости  $I_t(\theta)$ . 1.0pt

**B.4** Определите угол падения  $\theta_1$ , соответствующий минимуму пропускания на длине волн лазера. Определите ширину провала  $\Delta\theta_1$  на графике зависимости  $I_t(\theta)$  на уровне половины его глубины (рис. 14a). 0.2pt

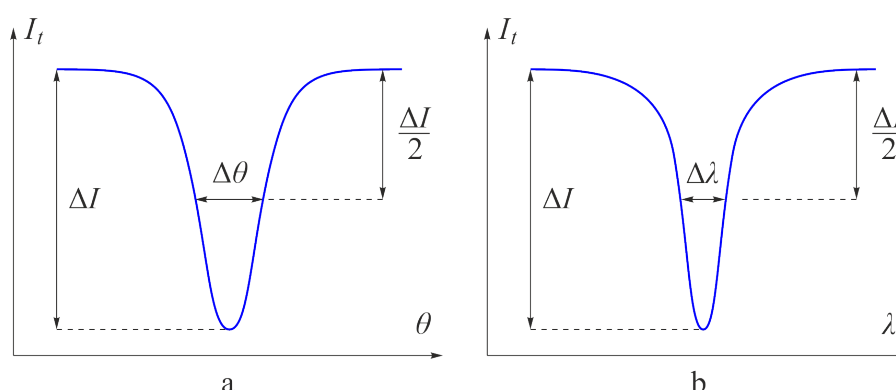


Рис. 14. Ширина провала интенсивности излучения, прошедшего через фотонный кристалл на половине глубины провала: в зависимости от (а) угла падения, (б) от длины волны.

**B.5** Используя закон Брэгга-Снелла (2), определите нормальную длину волны минимума пропускания  $\lambda_X$  для образца X. Используйте значение  $n_X$  из задания А, из пункта В.4 значение  $\theta_1$  и длину волны лазера  $\lambda$ . 0.2pt

Когда свет падает перпендикулярно кристаллу ( $\theta = 0$ ), спектральная ширина  $\Delta\lambda$  (рис. 14b) миниму-



ма пропускания, соответствующая  $m = 1$ , может быть выражена через  $n$  и  $\Delta n$  следующим образом:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \frac{\Delta n}{n}. \quad (6)$$

Для того, чтобы оценить  $\Delta n_X$  для образца X, будем предполагать, что относительная спектральная ширина минимума пропускания  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$  при изменении угла падения не изменяется.

<b>B.6</b>	Оцените разницу показателей преломления $\Delta n_X$ образца X.	0.6pt
------------	---	-------

Нанесите немного воды на лицевую сторону образца X. Для предотвращения испарения воды во время эксперимента, поместите покрывное стекло на образец. На обратной стороне образца имеется слой твердого оксида толщиной 15 нм, препятствующий выливаю воды.

**Будьте осторожны! Образцы очень хрупкие. Их ширина составляет четверть диаметра волоса. Берите образцы только за рамку. Покрывное стекло также очень хрупкое! Держите его только с помощью пинцета.**

<b>B.7</b>	Определите угол падения $\theta_2$ , соответствующий минимуму пропускания за-полненного водой образца на длине волны лазера.	0.3pt
------------	--	-------

<b>B.8</b>	Определите среднюю пористость $p_X$ образца и показатель преломления оксида алюминия $n_{AAO}$ .	1.0pt
------------	--	-------

<b>B.9</b>	Определите пористость $p_1$ и $p_2$ слоев в образце X.	0.6pt
------------	--	-------



### Задание С. Образец Y. Несколько минимумов пропускания (4.5 балла)

Структура образца Y более сложная чем у образца X. Образец Y имеет четыре минимума пропускания в видимом спектральном диапазоне (400-800 нм), соответствующие четырем последовательным целым числам  $m$  в законе Брэгга-Снелла (2). Показатели преломления образцов X и Y одинаковые  $n_Y = n_X$ .

**C.1** Хотя образец Y имеет четыре минимума пропускания, в спектральных измерениях можно наблюдать только три из них. Используя спектральные измерения (см. Задание A), определите нормальные длины волн этих трех минимумов пропускания  $\lambda_1^{sp}$ ,  $\lambda_2^{sp}$ ,  $\lambda_3^{sp}$ . 0.6pt

Теперь проведите измерения с лазером для образца Y (см. Задание B). Измерения с лазером позволяют определить нормальные длины волн минимумов пропускания с большей точностью. Кроме того, вы сможете определить значения коэффициентов пропускания, которые вам понадобятся в части E.

**C.2** Для красного лазера измерьте зависимость интенсивности  $I_{red}$  излучения, прошедшего через образец, от угла поворота образца  $\theta$ . 0.5pt

**C.3** Для красного лазера измерьте зависимость интенсивности  $I_{green}$  излучения, прошедшего через образец, от угла поворота образца  $\theta$ . 0.5pt

**C.4** Для красного лазера измерьте зависимость интенсивности  $I_{blue}$  излучения, прошедшего через образец, от угла поворота образца  $\theta$ . 0.5pt

**C.5** Используя результаты полученные в пунктах C.2 - C.4, определите нормальные длины волны четырех минимумов пропускания. 0.6pt

**C.6** Определите целые числа  $m$ , соответствующие четырем нормальным длинам волн, полученным в C.5. Вы можете построить график, если вам это необходимо. 1.0pt

**C.7** Определите период  $D_Y$  образца Y в нанометрах. 0.2pt

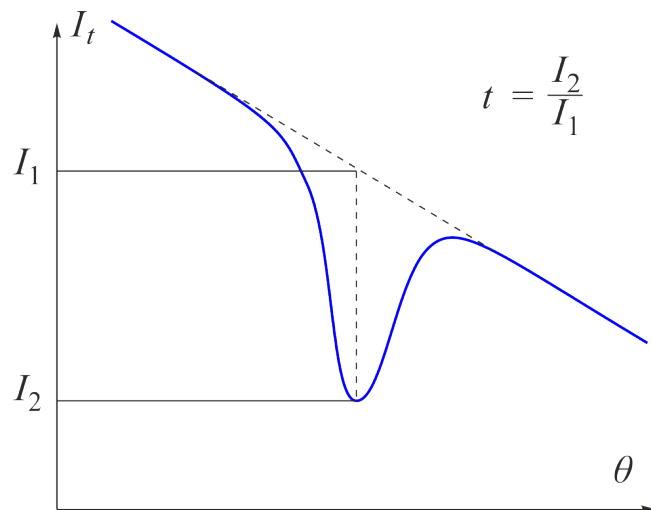


Рис. 15. Определение коэффициента пропускания  $t$  с помощью графика зависимости  $I(\theta)$

- C.8** Определите значения коэффициентов пропускания  $t$  для четырех минимумов пропускания образца  $Y$  (рис. 15). 0.6pt  
*Эти значения будут использованы в задании E для определения структуры образца  $Y$ . Вы можете построить график, если вам это необходимо, хотя это и не является обязательным требованием.*





## Задание D. Образец Z. Пропадавшие минимумы пропускания (4.5 балла)

Закон Брэгга - Снелла (2) определяет углы и длины волн, при которых может наблюдаться минимум пропускания. Значение коэффициента пропускания  $t$  зависит от внутренней структуры периода образца. Он может иметь такую структуру, что некоторые минимумы, которые предсказывает закон Брэгга - Снелла, имеют значение коэффициента пропускания, равное 1 ( $t = 1$ ) и поэтому не наблюдаются. Будем называть такие минимумы пропускания **пропадавшими минимумами пропускания**. Те минимумы, которые не пропали, мы будем называть **видимыми**.

Считается, что минимум пропускания пропал, если он не может быть замечен в спектральных измерениях или измерениях с лазером при тех значениях углов и длин волн, которые предсказаны законом Брэгга-Снелла. Образец Y не имеет пропадавших минимумов пропускания. Наоборот, образец Z имеет 2 пропадавших минимума в видимом спектре. Это означает, что не все видимые минимумы пропускания соответствуют последовательным значениям  $m$ .

Средние показатели преломления образцов X и Z совпадают:  $n_Z = n_X$ .

<b>D.1</b>	Определите нормальные длины волн $\lambda_Z$ видимых минимумов пропускания для образца Z. Используйте спектральные измерения и измерения с лазером. Опишите ваши эксперименты при помощи рисунков и уравнений.	1.2pt
------------	--	-------

<b>D.2</b>	Определите целые числа $m$ , соответствующие видимым минимумам пропускания. Вы можете построить график, если это вам необходимо.	2.0pt
------------	--	-------

<b>D.3</b>	Определите период $D_Z$ образца Z в нанометрах.	0.3pt
------------	---	-------

<b>D.4</b>	Определите, какие минимумы пропускания пропали. Получите их значения $m'$ , удовлетворяющие закону Брэгга-Снелла и нормальные длины волн $\lambda'_Z$ .	1.0pt
------------	---	-------



## Задание Е. Образцы Y и Z. Внутренняя структура периода.

Закон Брэгга - Снелла (2) определяет углы и длины волн, при которых могут наблюдаться максимумы отражения или минимумы пропускания (рис. 9). Величина пропускания определяется внутренней структурой периода.

В этом задании обсуждается упрощенная теория вычисления коэффициента отражения. Рассматривается случай нормального падения волны ( $\theta = 0$ ). В этом случае закон Брэгга-Снелла имеет вид:

$$2Dn = m\lambda \quad (7)$$

где  $D$  - период кристалла.

В этой модели мы предполагаем, что свет отражается только от той границы, где он переходит из области с большим показателем преломления в область с меньшим. Отражающие границы, рассматриваемые в модели, отмечены на рис. 16 стрелками.

Образцы X, Y и Z состоят из слоев, которые могут иметь только одно из двух заданных значений показателей преломления и только одну фиксированную толщину. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только этого частного случая.

Обозначим  $d_l$  толщину двух слоев,  $D$  период кристалла,  $\delta_j$  расстояние между началом периода и отражающей границей с номером  $j$ .

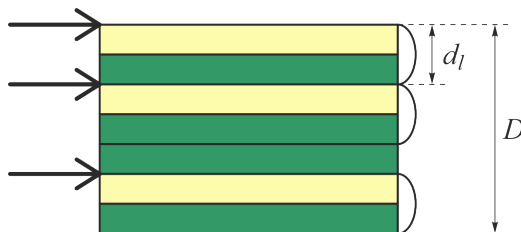


Рис.16. Пример внутренней структуры периода кристалла  $D$ . Темно-зеленые слои имеют более высокий показатель преломления, ярко-желтые слои имеют более низкий показатель преломления. Все слои имеют одинаковую толщину  $d_l/2$ . Отражающие границы, рассмотренные в модели, отмечены стрелками.

Например, структура представленная на Рис. 16 имеет период  $D = 3.5d_l$ , расстояние между началом периода и отражающими границами  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = d_l$ ,  $\delta_3 = 2.5d_l$ .

Для луча, который отразился от границы  $j$ , набег фазы определяется выражением

$$\varphi_{j_m} = 2\pi \frac{2\delta_j n}{\lambda} = 2\pi m \frac{\delta_j}{D} \quad (8)$$

Рассматривая интерференцию между лучами, отраженными от границ одного периода, мы находим, что интенсивность отраженного излучения для максимума с номером  $m$  из закона Брэгга-Снелла равна:

$$I_{refl,m} \sim \left| \sum_j \exp(i\varphi_{j_m}) \right|^2 \quad (9)$$



где  $i$  – мнимая единица.

Модель, рассмотренная выше, не позволяет получить точное значение величины максимумов интенсивности отраженного света, но она сохраняет знак неравенства между ними, т.е. вы можете сравнить величины максимумов и сказать какой из них больше. Если интенсивность отраженного излучения большая, то величина коэффициента пропускания  $t$  является маленькой. Если значение максимума отраженного излучения достаточно низкое, то мы считаем, что это соответствует случаю пропавшего минимума.

В приложении есть таблица со значениями  $I_m/I_0$ , вычисленными согласно уравнению (9) для целых  $m$  от 1 до 20. Интенсивность  $I_0$  рассчитывается согласно (9) для значения  $m = 0$ . В этом случае все отраженные лучи интерферируют без фазового сдвига, что дает максимально возможную интенсивность. Значения  $I_m/I_0$  представлены в %.

Среди представленных структур есть структуры образцов Y и Z.

<b>E.1</b>	Сравните значения коэффициентов пропускания для образца Y, полученные в С.8, с таблицей в приложении. Определите структуру образца Y. Напишите название структуры в листе ответов.	1.2pt
------------	--	-------

<b>E.2</b>	Определите структуру образца Z. Запишите название структуры в листе ответов.	1.3pt
------------	--	-------

## Приложение

Возможные варианты структур образцов Y и Z. Названия структур приведены под рисунками. Числовые значения  $I_m/I_0$  представлены в таблице в %.

$d_1/d_2 = 1.13$								
m	15-5	13-3	12-1	n-3	n-6	n-9	h15-5	h5-5
1	1	3	11	3	1	0	1	0
2	0	0	33	7	1	0	0	0
3	1	6	11	56	1	0	1	0
4	0	0	33	56	2	0	0	0
5	2	41	11	7	6	1	2	0
6	0	0	100	3	48	1	1	0
7	5	41	11	100	48	2	3	0
8	0	0	33	3	6	5	6	0
9	41	6	11	7	2	45	36	11
10	0	0	33	56	1	45	1	72
11	41	3	11	56	1	5	32	15
12	0	100	100	7	1	2	10	2
13	5	3	11	3	100	1	1	0
14	0	0	33	100	1	1	2	0
15	2	6	11	3	1	0	0	0
16	0	0	33	7	1	0	1	0
17	1	41	11	56	2	0	0	0
18	0	0	100	56	6	0	6	7
19	1	41	11	7	48	100	28	27
20	100	0	33	3	48	0	25	23